一类具有非线性密度制约的食物链生态系统平衡点稳定性的研究

林浩亮
（韩山师范学院，广东 潮州 521041）

摘 要：利用Liapunov第二方法，通过构造Liapunov函数，讨论了一类具有非线性密度制约的食物链生态系统平衡点的稳定性.

关键词：食物链；密度制约；平衡点；稳定性
中图分类号：O175.14 **文献标识码：**A **文章编号：**1673-0143(2007)02-0005-03

0 引言

在自然界中，生活在同一环境中的各类生物种群之间存在着复杂的关系. 食物链生态系统是指各类生物种群之间存在这样的关系：系统中，后一种生物种群主要以捕食前一种生物种群为生，并且是自身之后那一生物种群的食饵，从而形成捕食链. 文献 [1] 研究了三种群食物链生态系统

$$\begin{cases}\dot{x}=x(A-by),\\ \dot{y}=y(-B+\beta bx-cz),\\ \dot{z}=z(-C+\gamma cy)\end{cases} \tag{1}$$

的平衡点的稳定性，得出其平衡点是稳定的. 但是，系统（1）并没有考虑种群本身的密度制约. 事实上，种群在自身繁殖的过程中，要受到自身密度的影响，密度越大，种群内对食饵的竞争越大. 本文通过构造 Liapunov 函数的方法，讨论了一类具有非线性密度制约的三种群食物链生态系统

$$\begin{cases}\dot{x}_1=x_1(b_1-f_1(x_1)-a_{12}x_2),\\ \dot{x}_2=x_2(-b_2+a_{21}x_1-f_2(x_2)-a_{23}x_3),\\ \dot{x}_3=x_3(-b_3+a_{32}x_2-f_3(x_3))\end{cases} \tag{2}$$

的平衡点稳定性（其中 $f(x_i)$ $i=1,2,3$ 是严格递增的非线性密度制约函数， $f(x_i)>0$，且所有的系数均为正常数），并将结论推广到 n 种群食物链生态系统

$$\begin{cases}\dot{x}_1=x_1(b_1-f_1(x_1)-a_{12}x_2),\\ \dot{x}_2=x_2(-b_2+a_{21}x_1-f_2(x_2)-a_{23}x_3),\\ \quad\cdots\\ \dot{x}_i=x_i(-b_i+a_{i,\,i-1}x_{i-1}-f_i(x_i)-a_{i,\,i+1}x_{i+1}),\\ \quad\cdots\\ \dot{x}_n=x_n(-b_n+a_{n,\,n-1}x_{n-1}-f_n(x_n)).\end{cases} \tag{3}$$

1 预备知识

引理 1.1[2] 设 $X^*\in\Gamma$ 是系统 $X'=f(X)$ 的一个平衡点，则有一函数 $V(X)$ 在区域 $\Gamma:\{X|x_1>0,\ x_2>0,\ \cdots,\ x_n>0\}$内为 Liapunov 函数，如果它具有下列性质：

(i) $V(X^*)=0$，当 $X\in\Gamma$，$X\neq X^*$时，$V(X)>0$；

(ii) 当 $X_i\to0$ 或 $x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2\to\infty$（$i=1,2,\cdots,n$）时，$V(X)\to\infty$；

(iii) 关于系统有 $\dot{V}(X)=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial V}{\partial X_i}X_iF_i(X)\le0$，$X\in\Gamma$.

引理 1.2[2] 若 X^* 是模型

$$\frac{\mathrm{d}X_i}{\mathrm{d}t}=X_iF_i(x_i,\ x_2,\cdots,\ x_n),\quad i=1,2,\ \cdots,\ n \tag{4}$$

的正平衡点，其中 $F_i(X)$ 在正象限中连续，若在区域 $\Gamma:\{X|x_1>0,\ x_2>0,\ \cdots,x_n>0\}$内存在一函数 $V(X)$，且具有下列性质：

(i) 当 $X\in\Gamma$，$X\neq X^*$ 时，$V(X)>0$；

(ii) 在 Γ 内 $V(X)$ 有极小值为零，且在 X^* 点发生，即 $V(X^*)=0$；

收稿日期：2007－03－31
作者简介：林浩亮（1979－），男，广东潮州人，助教，主要从事微分方程研究.

(iii) 当 $X_i\to 0$ 或 $x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2$ ($i=1,2,\cdots,n$)时，$V(X)\to\infty$；

(iv) 关于系统（4）有 $\dot V(X)=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial V}{\partial X_i}X_iF_i(X)\le 0$，$X\in\Gamma$；

(v) $\{X^*\}$ 是正象限中惟一的一个不变集，则系统（4）的平衡点 X^* 是全局稳定的.

由引理1.1和引理1.2，可得

引理1.3　X^* 是模型

$$\frac{\mathrm{d}X_i}{\mathrm{d}t}=X_iF_i(x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n)\quad i=1,2,\ \cdots,n$$

的正平衡点，若在区域 Γ: $\{X|x_1>0,x_2>0,\ \cdots,\ x_n>0\}$内存在一个Liapunov函数 V，且不变集 $V^*=\{(x_1,x_2,\ \cdots,\ x_n)|\dot V=0\}$ 除平衡点 X^* 外不含系统的正半轨线，则系统（4）的平衡点 X^* 是全局稳定的.

2　主要结果

2.1　考虑具有非线性密度制约的三种群食物链生态系统

定理2.1　设系统(2)有孤立的正平衡点 $X^*=(x_1^*,\ x_2^*,\ x_3^*)$，则平衡点 X^* 全局稳定，即任意初值为 $X(0)>0$ 对应的解 $X(t)$，当 $t\to\infty$时，都有 $X(t)\to X^*$.

注：若没有正平衡点，生态系统会出现死亡；若出现非惟一正平衡点，生态不能保持宏观全局渐近稳定，产生宏观不稳，这两种情况不讨论.

证明　由于系统（2）存在孤立的正平衡点 $X^*=(x_1^*,\ x_2^*,\ x_3^*)$，即

$$\begin{cases}x_1^*(b_1-f_1(x_1^*)-a_{12}x_2^*)=0,\\ x_2^*(-b_2+a_{21}x_1^*-f_2(x_2^*)-a_{23}x_3^*)=0,\\ x_3^*(-b_2+a_{32}x_2^*-f_3(x_3^*))=0.\end{cases}\tag{5}$$

由（5）式，系统（2）可改写为

$$\begin{cases}\dot x_1=x_1[-f_1(x_1)-f_1(x_1^*))-a_{12}(x_2-x_2^*)],\\ \dot x_2=x_2[a_{21}(x_1-x_1^*)-(f_2(x_2)-f_2(x_2^*))-a_{23}(x_3-x_3^*)],\\ \dot x_3=x_3[a_{32}(x_2-x_2^*)-f_3(x_3)-f_3(x_3^*)].\end{cases}\tag{6}$$

从问题的生态学意义来看，我们感兴趣的只是非负解. 现要证明孤立的平衡点 $X^*=(x_1^*,\ x_2^*,\ x_3^*)$ 的稳定性,关键的是构造出合适的Liapunov函数.

考虑函数 $U(X)=\sum_{i=1}^{3}c_i(x_i-x_i^*\ln x_i)$,其中 $c_1=1$，$c_2=\frac{a_{12}}{a_{21}}$，$c_3=\frac{a_{12}a_{23}}{a_{21}a_{32}}$.

令 $V(X)=U(X)-U(X^*)$，下证 $V(X)$ 是一个Liapunov函数.

由于 $\frac{\partial V}{\partial x_i}=c_i(1-\frac{x_i^*}{x_i})$　($i=1,2,3$)，

故　$$\frac{\partial V}{\partial x_i}=0\Longleftrightarrow x_i=x_i^*,\tag{7}$$

且　$$\frac{\partial^2 V}{\partial x_i^2}=c_i\frac{x_i^*}{x_i^2}>0,\ (i=1,2,3).\tag{8}$$

由（7）、(8）式可知函数 $V(X)$ 在点 $X^*=(x_1^*,\ x_2^*,\ x_3^*)$ 处达到局部极小值 $V(X^*)$.

由于 $V(X)$ 在区域 $s=\{X|X=(x_1,\ x_2,\ x_3)>0\}$ 中连续，故 $V(X)$ 在点 $X^*=(x_1^*,\ x_2^*,\ x_3^*)$ 处取得最小值$V(X^*)$. 由定义，$V(X^*)=0$，故对域 $s=\{X|X>0\}$中任何区别于 X^* 的点 X，有$V(X)>0$，易见当 $\sum_{i=1}^{3}x_i^2\to\infty$ 或 $x_i\to 0$ 时，$V(X)\to\infty$，即函数 $V(X)$ 是无穷大正函数.

又 $f_i(x_i)$ 是单调递增的，故

$$(x_i-x_i^*)[f_i(x_i)-f_i(x_i^*)]\ge 0,\quad (i=1,2,3),\tag{9}$$

则沿系统（6）计算 $V(X)$ 的全导数，得

$$\begin{aligned}\dot V(X)=&\sum_{i=1}^{3}c_i\frac{x_i-x_i^*}{x_i}\cdot\dot x_i=\\ &(x_1-x_1^*)[-(f_1(x_1)-f_1(x_1^*))-a_{12}(x_2-x_2^*)]+\\ &\frac{a_{12}}{a_{21}}(x_2-x_2^*)[a_{21}(x_1-x_1^*)-(f_2(x_2)-f_2(x_2^*))-\\ &a_{23}(x_3-x_3^*)]+\frac{a_{12}a_{23}}{a_{21}a_{32}}(x_3-x_3^*)[a_{32}(x_2-x_2^*)-(f_3(x_3)-\\ &f_3(x_3^*)]=-\sum_{i=1}^{3}c_i(x_i-x_i^*)[f_i(x_i)-f_i(x_i^*)]\le 0.\end{aligned}\tag{10}$$

由引理1.1知，$V(X)$ 是一个Liapunov函数，考虑不变集 $V^*=\{(x_1,\ x_2,\ x_3)|\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}=0\}$，下证此不变集除点 $X^*=(x_1^*,\ x_2^*,\ x_3^*)$ 外不含系统（2）的正半轨线. 事实上，由（10）式得，$\dot V=0$ 当且仅当 $(x_i-x_i^*)[f_i(x_i)-f_i(x_i^*)]=0$，($i=1,2,3$). 由于 $f(x_i)$ ($i=1,2,3$) 是严格递增的函数，故 $(x_i-x_i^*)[f_i(x_i)-f_i(x_i^*)]=0$ 当且仅当 $f_i(x_i)=f_i(x_i^*)$，即 $x_i=x_i^*$，也即证不变集 $V^*=\{(x_1,\ x_2,\ x_3)|\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}=0\}$ 除点 $X^*=(x_1^*,\ x_2^*,\ x_3^*)$ 外不含系统（2）的正半轨线，由引理1.3知 $X^*=(x_1^*,\ x_2^*,\ x_3^*)$ 是全局稳定的，即加了非线性密度制约的食物链生态系统仍然是稳定的.

2.2　*n* 种群食物链生态系统

定理2.2　设系统(3)有孤立的正平衡点 $X^*=(x_1^*,\ x_2^*,\cdots,\ x_n^*)$，则平衡点 X^* 全局稳定，即任意初值 $X(0)>0$ 为对应的解 $X(t)$，当 $t\to\infty$ 时，都有 $X(t)\to X^*$.

证明　设系统(3)存在孤立的正平衡点$X^*=$

$(x_1^*, x_2^*, \cdots, x_n^*)$, 即

$$\begin{cases} x_1^*(b_1 - f_1(x_1^*) - a_{12}x_2^*) = 0, \\ x_2^*(-b_2 + a_{21}x_1^* - f_2(x_2^*) - a_{23}x_3^*) = 0, \\ \cdots \\ x_i^*(-b_i + a_{i,\ i-1}x_{i-1}^* - f_i(x_i^*) - a_{i,\ i+1}x_{i+1}^*) = 0, \\ \cdots \\ x_n^*(-b_n + a_{n,\ n-1}x_{n-1}^* - f_n(x_n^*)) = 0. \end{cases} \tag{11}$$

由 (11) 式, 系统 (3) 可改写为

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_1[-(f_1(x_1) - f_1(x_1^*)) - a_{12}(x_2 - x_2^*)], \\ \dot{x}_2 = x_2[a_{21}(x_1 - x_1^*) - (f_2(x_2) - f_2(x_2^*)) - a_{23}(x_3 - x_3^*)], \\ \cdots \\ \dot{x}_i = x_i[a_{i,\ i-1}(x_{i-1} - x_{i-1}^*) - (f_i(x_i) - f_i(x_i^*)) - a_{i,\ i+1}(x_{i+1} - x_{i+1}^*)], \\ \cdots \\ \dot{x}_n = x_n[a_{n,\ n-1}(x_{n-1} - x_{n-1}^*) - (f_n(x_n) - f_n(x_n^*))], \end{cases} \tag{12}$$

其中 $a_{10}=0$, $a_{n,\ n+1}=0$.

考虑函数 $U(X)=\sum_{i=1}^{n} c_i(x_i - x_i^* \ln x_i)$, $c_1=1$, $c_2=\frac{a_{12}}{a_{21}}, \cdots, c_n=\frac{a_{12}a_{23}\cdots a_{n-1,\ n}}{a_{21}a_{32}\cdots a_{n,\ n-1}}$. 令 $V(X)=U(X)-U(X^*)$, 可证 $V(X)$ 在点 $X^*=(x_1^*, x_2^*, \cdots, x_n^*)$ 处达到局部极小值 $V(X^*)$, 由于 $V(X)$ 在区域 $s=\{X|X=(x_1, x_2, \cdots, x_n)>0\}$ 中连续, 故 $V(X)$ 在点 $X^*=(x_1^*, x_2^*, \cdots, x_n^*)$ 处取得最小值 $V(X^*)$. 由定义, $V(X^*)=0$, 故对域 $s=\{X|X>0\}$ 中任何区别于 X^* 的点,有 $V(X)>0$, 易见当 $\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \to \infty$ 或 $x_i \to 0$ 时, $V(X)\to\infty$, 即函数 $V(X)$ 是无穷大正函数.

又 $f_i(x_i)$ 是单调递增的, 故

$$(x_i - x_i^*)=[f_i(x_i) - f_i(x_i^*)] \geq 0, (i=1,2,\cdots,n), \tag{13}$$

则沿系统 (12) 计算 $V(X)$ 的全导数, 得

$$\dot{V}(X)=\sum_{i=1}^{n} c_i \frac{x_i - x_i^*}{x_i} \cdot \dot{x}_i = \sum_{i=1}^{n} c_i \frac{x_i - x_i^*}{x_i}[a_{i,\ i-1}(x_{i-1} - x_{i-1}^*) - (f_i(x_i) - f_i(x_i^*)) - a_{i,\ i+1}(x_{i+1} - x_{i+1}^*)] = -\sum_{i=1}^{n} c_i(x_i - x_i^*)[(f_i(x_i) - f_i(x_i^*)] \leq 0 \tag{14}$$

由引理1.1知, $V(X)$ 是一个 Liapunov 函数, 考虑不变集 $V^*=\{(x_1, x_2, \cdots, x_n)|\frac{dV}{dt}=0\}$, 类似定理2.1的证明, 可证此不变集除点 $X^*=(x_1^*, x_2^*, \cdots, x_n^*)$ 外不含系统 (3) 的正半轨线. 由引理1.3知 $X^*=(x_1^*, x_2^*, \cdots, x_n^*)$ 是全局稳定的.

3　进一步讨论

若系统 (3) 中有 k ($1\leq k<n$) 个 $f_i(x_i)$ 为零, 则系统变为有 $n-k$ 个种群受非线性密度制约的食物链生态系统, 由 (14) 可知, 此时 $\frac{dV}{dt}$ 是由 $n-k$ 个常负项构成的多项式, $\frac{dV}{dt}\leq 0$, 容易验证 $V^*=\{(x_1, x_2, \cdots, x_n)|\frac{dV}{dt}=0\}$ 仅包含正平衡点 $X^*=(x_1^*, x_2^*, \cdots, x_n^*)$, 系统在该平衡点是稳定的.

参考文献:

[1] 缪永伟.一类三种群生态系统平衡点稳定性的研究[J]. 工科数学,2002,8(4):19-23.

[2] 陈兰荪. 数学生态学模型与研究方法[M]. 北京:科学出版社,1998.

[3] 史密斯 J M. 生态学模型[M]. 北京,科学出版社, 1997.

[4] Hirsch M W, Smale S. Differential equations, dynamical systems and linear algebra[M], Academic Press, 1974.

Research of Balance Point Stability in a Kind of Food Chain Ecosystem with Non-linear Density Restriction

LIN Hao-liang

(Hanshan Normal University, Chaozhou 521041, Guangdong, China)

Abstract: Using the second method of Liapunov, by making the Liapunov function, discussing the balance point stability in a kind of food chain ecosystem with non-linear density restriction.

Key words: food chain; density restriction; balance point; stability