免赔额数学模型的经济学意义探讨

吴秀君

(江汉大学 数学与计算机科学学院，武汉 430056)

摘 要：利用期望值原理计算保费，以最大化消费者的投保效用为目标函数建立数学模型，对均衡状态下解的变化进行分析．结果表明：巨灾保险的有效需求随免赔额的增加而减少，随附加费率的减少而增加；最优的免赔额随消费者的财富增长而增长．

关键词：免赔额；巨灾保险；附加费率

中图分类号：O221；F840.64 **文献标识码**：A **文章编号**：1673-0143(2007)04-0019-02

0 引言

目前，国内对巨灾保险早日融入减灾体系的呼声渐高，《关于保险业改革发展的若干意见》中提出保险要扩大风险转移和补偿的收益面，并纳入灾害事故防范救助体系中．因此对巨灾保险的研究也成为理论研究的热点之一．

传统的保险业主要承保可保风险，而巨灾保险属于不可保风险，传统的风险理论对于巨灾保险不一定适合．免赔额是指为了减少小额索赔和提高被保险人的自我保护意识，保险人和被保险人在保险合同中商定的免于赔偿的最高数额．本文将通过分析期望效用的免赔额模型，对巨灾保险的经济学意义进行分析．

1 基于期望效用的免赔额模型

假设投保人面临着可能的风险，损失随机变量 X 的分布率为 $\Pr(X=x_i)=P_i(i=1,2,\cdots,n)$，$\Pr(X=0)=1-\sum_{i=1}^{n}p_i$．用 D 表示免赔额，P 为保险费，W 为消费者的财富．若消费者参加投保，则他的随机财富变为 $\widetilde{W}=\{W-P-D,\ p;\ W-P,\ 1-p\}$，$p=\sum_{i=1}^{n}p_i<1$（由于各种损失状态下的最优免赔额相同，故可如此简化），其期望效用为

$$V(\widetilde{W})=pu(W-P-D)+(1-p)u(W-P). \tag{1}$$

设保费附加因子为 λ，保费计算公式为

$$P=(1+\lambda)(\sum_{i=1}^{n}p_i(x_i-D)). \tag{2}$$

投保人的决策为在（2）的约束下选择适当的免赔额，使得其投保后的期望效用最大化，即

$$(\mathrm{Prob})\max_{D}V(\widetilde{W})=pu(W-P-D)+(1-p)u(W-P).$$

$$\text{s.t.}\quad P=(1+\lambda)(\sum_{i=1}^{n}p_i(x_i-D)).$$

2 模型求解

设 D^E 表示问题（Prob）的解．则一阶条件为

$$\frac{\partial V^E}{\partial D}=pu'(W-P-D)((1+\lambda)p-1)+(1-p)p(1+\lambda)u'(W-P)=0. \tag{3}$$

二阶条件为

$$\frac{\partial^2 V^E}{\partial D^2}=p(-(1+\lambda)p-1)^2u''(W-P-D)+(1-p)(-(1+\lambda)p)^2u''(W-P)<0. \tag{4}$$

（A）易知当 $\lambda=0$ 时，由（3）式得 $D^E=0$．即当保费是完全基于精算值时，也就是说附加费率为零时，消费者购买完全保险是最优的策略．而对一阶条件取极限，有

$$\lim_{D\to 0^+}\frac{\partial V^E}{\partial D}=\lambda pu'(W-P)>0,\ (\lambda>0), \tag{5}$$

（5）式说明当 $\lambda>0$ 时，若附加费率在0的较小的

收稿日期：2007－04－02
基金项目：武汉市属高校科研项目（2006Y19)；湖北省教育厅科研计划项目（B200634001)
作者简介：吴秀君（1969－)，女，湖北武汉人，副教授，博士，主要从事博弈论和风险理论研究．

$\delta-$右邻域内，消费者在最优选择时的效用水平随免赔额的增长而增长.

（B）用隐函数求导法则，对式（3）求导数得

$$\frac{\partial D^E}{\partial W}=\frac{u''(W-P-D)[(1+\lambda)p-1]^2+(1+p)p(1+\lambda)^2u''(W-P)}{[(1+\lambda)p-1]u''(W-P-D)+(1-p)(1+\lambda)u''(W-P)},\tag{6}$$

显然上式右边的分子总是负的. 下面讨论分母的符号：

当 $u''<0$，$u'''>0$ 时，则效用函数满足

$u''(W-P-D)<u''(W-P)$，且

$$[(1+\lambda)p-1]u''(W-P-D)+(1-p)(1+\lambda)u''(W-P)<[(1+\lambda)p-1]u''(W-P)+(1-p)(1+\lambda)u''(W-P)=\lambda u''(W-P)<0\tag{7}$$

当 $u'''<0$ 时也可同样得到分母的符号为负. 因此当 $u''<0$ 时，（6）式中的分式总是正的. 即满足条件 $u'''>0$ 时，有 $\frac{\partial D^E}{\partial W}>0$，也就是说依照期望效用决策时，免赔额总是随消费者财富的增长而增长.

3 模型的经济学意义

巨灾是一种典型的小概率大损失的事件. 事件发生概率 p 很小，意味着消费者付出保费后危险事件可能并不发生，因此很多消费者投保巨灾保险的意愿不强. 而尽管 p 很小，一旦出险，所有的标的都会受到影响. 在受灾年份和非受灾年份，对保险公司的结果是完全不一样的. 灾害的发生是随机的，即对保险公司而言随时都要有充分的现金流用于赔付. 根据保险合同的特点，保险费的确定是在期望损失的基础上来确定的. 如果发生巨灾的概率是100年一遇，那么保险公司根据期望损失确定的保费意味着在100年的时间内，他的收支是相抵的. 但问题是如果在投保的头几年，巨灾就发生了，那么积累的保费与赔付额就相差很大. 因此保险公司在短时间内会面临巨额索赔，严重的会导致破产. 因此巨灾保险就会呈现一个供给和有效需求双低的格局. 在对期望模型进行分析的基础上，得到的启示主要有以下几点：

①附加费率控制

目前我国巨灾保险是呈现一个供给和有效需求双低的格局. 从分析（A）可看出，一般来说，若需求函数在 $\lambda=0$ 时，消费者应购买完全保险. 因此理论上附加费率的降低可以增加有效需求. 由于附加因子作用的一部分是因调节概率估计的偏差所带来的影响，另一部分则是弥补保险的营销成本，因此要降低附加费率，一方面要尽可能提高精算和险种设计水平，另一方面要提高管理水平，降低经营成本，为开展巨灾保险创造良好条件.

实际上，保费附加系数高说明巨灾保险的社会成本高（对经济不利）. 在一定条件下，针对不同收入水平提供不同等级的免赔额保险可以增加总的社会福利，而且福利的增加来源于消费者满足程度的提高. 若巨灾保险采取免赔额保险形式，则统一的免赔额会影响消费者的福利.

②免赔额设置

对于巨灾保险，由（B）可看出，若由组织保险和平衡保费带来的安全保费系数（即总附加系数 λ）很大，在满足一定的效用条件下，对消费者最优的免赔额是随财富的增长而增长的，即 $\frac{\partial D^E}{\partial W}>0$. 免赔额增加也说明消费者自保的额度增加，即收入越高的消费者越倾向于自己承担风险.

③动态调整

从②知，巨灾保险是对不同收入的消费者设计不同的免赔额，可以增加有效需求. 但财富的增长是个动态的数据，因此也说明了巨灾保险的险种设计必须随着经济发展的水平以及随消费者的收入水平而调整.

参考文献：

[1] Gollier C, Schlesinger H. Arrow’s theorem on the optimality of deductibles: a stochastic dominance approach[J]. Economic Theory, 1996, (7): 359-363.

[2] Ermoliev Y M, Ermolieva T Y, MacDonald G J,*et al*. A system approach to management of catastrophic risks[J]. European Journal of Operational Research, 2000, 122, 452-460.

[3] Attanasi E D, Karlinger M R. Risk preferences and flood insurance[J]. American Journal of Agricultural Economics, 1979, 61(3): 490-495.