

两两 NQD 列的一个强大数定律

马海俊, 高 萍, 王元芳

(湖北大学 数学与计算机科学学院, 武汉 430062)

摘 要: 研究了在一定条件下不同分布的两两NQD列的强大数定律, 得到了新的结果.

关键词: 强大数定律; 两两NQD列; 分布

中图分类号: O211.4 文献标识码: A 文章编号: 1673-0143(2008)01-0020-03

两两NQD列的概念是Lehmann^[1]在1966年提出的. 称随机变量 X 和 Y 是NQD (Negatively Quadrant Dependent) 的, 若对 $\forall x, y \in R$ 有

$$P(X < x, Y < y) \leq P(X < x)P(Y < y).$$

称随机变量序列 $\{X_n, n \geq 1\}$ 是两两NQD的, 若 $\forall i \neq j, X_i$ 与 X_j 是NQD的.

两两NQD列是包含两两独立在内的非常广泛的概念, 后来的许多负相联的概念是在此基础上繁衍出来的, 著名的NA列^[2]就是其特例之一. 因此对于两两NQD列的研究就显得更为基本, 同时更加困难. 到目前为止, 有不少文献讨论了两两NQD列的极限结果. Matula^[3]在1992年获得了同分布的两两NQD列的Kolmogorov型强大数定律; 王岳宝和苏淳^[4]在附加了某种混合条件后获得了同分布两两NQD列的Marcinkiwicz-Zygmund强大数定律和Baum和Katz完全收敛定理; 王岳宝等^[5]讨论了不同分布的两两NQD列的强稳定性; 吴群英^[6]则讨论了两两NQD列的三级数性质; 陈平炎^[7]则讨论了不同分布NQD列的Kolmogorov型强大数定律. 本文推广了陈平炎的结果, 在更为广泛的条件下讨论不同分布的两两NQD列的强大数定律, 得到了新的结果.

引理^[1] 设随机变量 X 和 Y 是NQD的, 则

(i) $EXY \leq EXEY$;

(ii) $P(X > x, Y > y) \leq P(X > x)P(Y > y), \forall x, y \in R$;

(iii) 如果 f, g 同为非降 (或非增) 的函数, 则 $f(X)$ 和 $g(Y)$ 仍为NQD的.

主要结果的证明需要用到下列定理:

定理A^[7] 设 $\{X_n, n \geq 1\}$ 是两两NQD列, 对任意的 $n \geq 1$, 方差 $\text{Var}(X_n) < \infty, \{a_n, n \geq 1\}$ 是非降趋于无穷的正常数序列. 假设

(a) $\sup_{n \geq 1} a_n^{-1} \sum_{i=1}^n E|X_i - EX_i| < \infty$;

(b) $\sum_{i=1}^{\infty} \text{Var}(X_n)/a_n^2 < \infty$.

则强大数定律 $a_n^{-1} \sum_{i=1}^n (X_i - EX_i) \rightarrow 0$ a.s 成立.

定理1 设 $\{X_n, n \geq 1\}$ 是两两NQD列, 且满足

$$\sup_{n \geq 1} a_n^{-1} \sum_{i=1}^n E|X_i| < \infty, \quad (1)$$

假设对每个 $n (\geq 1)$ 至少有如下条件之一成立:

(I) $\sum_{n=1}^{\infty} E\left(\frac{|X_n|^\beta}{a_n^\beta + |X_n|^\beta}\right) < \infty, 0 < \beta < 1$,

(II) $\sum_{n=1}^{\infty} E\left(\frac{|X_n|^\beta}{a_n |X_n|^{\beta-1} + a_n^\beta}\right) < \infty, 1 \leq \beta \leq 2$,

且有 $EX_n = 0$. 其中 $\{a_n, n \geq 1\}$ 是非降趋于无穷的正常数序列. 则强大数定律 $a_n^{-1} \sum_{i=1}^n X_i \rightarrow 0$ a.s 成立.

证明 当 $0 < \beta < 1, |X_n| > a_n$ 时, 有 $\frac{2|X_n|^\beta}{a_n^\beta + |X_n|^\beta} > 1$,

从而有

$$P(|X_n| > a_n) = E(I\{|X_n| > a_n\}) < 2E\left(\frac{|X_n|^\beta}{a_n^\beta + |X_n|^\beta}\right), \quad (2)$$

当 $1 \leq \beta \leq 2, |X_n| > a_n$ 时, 有 $\frac{2|X_n|^\beta}{a_n |X_n|^{\beta-1} + a_n^\beta} > 1$, 进而有

$$P(|X_n| > a_n) = E(T\{|X_n| > a_n\}) < 2E\left(\frac{|X_n|^\beta}{a_n |X_n|^{\beta-1} + a_n^\beta}\right), \quad (3)$$

当定理 1 中条件 (I) 或 (II) 成立时, 则由 (2)、(3) 两式得到

$$\sum_{n=1}^{\infty} P(|X_n| > a_n) < \infty. \quad (4)$$

因此由 Borel-Cantelli 引理, 要证 $a_n^{-1} \sum_{i=1}^n X_i \rightarrow 0$ a.s., 只需证明

$$a_n^{-1} \sum_{i=1}^n (X_i I\{|X_i| \leq a_i\} + a_i I\{X_i > a_i\} - a_i I\{X_i < -a_i\}) \rightarrow 0 \text{ a.s.}$$

令 $Y_i = X_i I\{|X_i| \leq a_i\} + a_i I\{X_i > a_i\} - a_i I\{X_i < -a_i\}$, $i=1, 2, \dots, n$, 因此只需证明

$$a_n^{-1} \sum_{i=1}^n EY_i \rightarrow 0 \text{ 及 } a_n^{-1} \sum_{i=1}^n (Y_i - EY_i) \rightarrow 0 \text{ a.s.}$$

首先证明 $a_n^{-1} \sum_{i=1}^n EY_i \rightarrow 0$.

因为

$$\begin{aligned} a_n^{-1} \left| \sum_{i=1}^n EY_i \right| &\leq a_n^{-1} \sum_{i=1}^n |EX_i I\{|X_i| \leq a_i\}| + \\ &a_n^{-1} \sum_{i=1}^n a_i P(|X_i| > a_i) \leq a_n^{-1} \sum_{i=1}^n |EX_i I\{|X_i| \leq a_i\}| \\ &+ \sum_{i=1}^n P(|X_i| > a_i), \end{aligned} \quad (5)$$

故对于任意的 $i \geq 1$, 当 $0 < \beta < 1$ 时, 有

$$\begin{aligned} |EX_i I\{|X_i| \leq a_i\}| &\leq E|X_i| I\{|X_i| \leq a_i\} \leq \\ &a_i E\left(\frac{|X_i|^\beta}{a_i^\beta} I\{|X_i| \leq a_i\}\right) \leq 2a_i E\left(\frac{|X_i|^\beta}{a_i^\beta + |X_i|^\beta}\right), \end{aligned} \quad (6)$$

当 $1 \leq \beta \leq 2$ 时, 有

$$\begin{aligned} |EX_i I\{|X_i| \leq a_i\}| &= |EX_i I\{|X_i| > a_i\}| \leq \\ &a_i E\frac{|X_i|}{a_i} I\{|X_i| > a_i\} \leq \\ &2a_i E\left(\frac{|X_i|^{\beta-1}}{a_i^{\beta-1} + |X_i|^{\beta-1}} \cdot \frac{|X_i|}{a_i} \cdot I\{|X_i| \leq a_i\}\right) \leq \\ &2a_i E\left(\frac{|X_i|^\beta}{a_i |X_i|^{\beta-1} + a_i^\beta}\right), \end{aligned} \quad (7)$$

当条件 (I) 或 (II) 成立时, 由 (4) ~ (7) 式及 Kronecker 引理, 有 $a_n^{-1} \left| \sum_{i=1}^n EY_i \right| \rightarrow 0$.

剩下只需证明 $a_n^{-1} \sum_{i=1}^n (Y_i - EY_i) \rightarrow 0$ a.s. 由引理知 $\{Y_n, n \geq 1\}$ 仍然是两两NQD列, 所以由定理 A, 只需证明

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n^{-2} E(Y_n - EY_n)^2 \leq \infty \text{ 及 } \sup_{n \geq 1} a_n^{-1} \sum_{i=1}^n E|Y_i - EY_i| < \infty.$$

由 C^r 不等式有

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} a_n^{-2} E(Y_n - EY_n)^2 &\leq 2 \sum_{n=1}^{\infty} a_n^{-2} EY_n^2 \leq \\ &6 \sum_{n=1}^{\infty} a_n^{-2} EX_n^2 I\{|X_n| \leq a_n\} + 6 \sum_{n=1}^{\infty} P(|X_n| > a_n). \end{aligned} \quad (8)$$

对于任意的 $n \geq 1$, 当 $0 < \beta < 1$ 时, 有

$$\begin{aligned} EX_n^2 I\{|X_n| \leq a_n\} &\leq a_n^2 E\left(\frac{|X_n|^\beta}{a_n^\beta} I\{|X_n| \leq a_n\}\right) \leq \\ &2a_n^2 E\left(\frac{|X_n|^\beta}{a_n^\beta + |X_n|^\beta}\right), \end{aligned}$$

当 $1 \leq \beta \leq 2$ 时, 有

$$EX_n^2 I\{|X_n| \leq a_n\} \leq 2a_n^2 E\left(\frac{|X_n|^\beta}{a_n |X_n|^{\beta-1} + a_n^\beta}\right).$$

因此当 (I) 或 (II) 成立时, 由 (8) 式有

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n^{-2} E(Y_n - EY_n)^2 < \infty,$$

又因为

$$\begin{aligned} a_n^{-1} \sum_{i=1}^n E|Y_i - EY_i| &\leq 2a_n^{-1} \sum_{i=1}^n E|Y_i| \leq \\ &2a_n^{-1} \sum_{i=1}^n E|Y_i| I\{|X_i| \leq a_i\} + 2a_n^{-1} \sum_{i=1}^n a_i P(|X_i| > a_i) \leq \\ &2a_n^{-1} \sum_{i=1}^n E|X_i| + 2 \sum_{i=1}^n P(|X_i| > a_i). \end{aligned}$$

所以由 (1)、(4) 式知

$$\sup_{n \geq 1} a_n^{-1} \sum_{i=1}^n E|Y_i - EY_i| < \infty \text{ 成立.}$$

定理得证.

推论 1 设 $\{X_n, n \geq 1\}$ 是满足式 (1) 的两两NQD列, 对每一个 $n \geq 1$, 有 $\sum_{i=1}^n E\left(\frac{|X_n|^\beta}{a_n^\beta}\right) < \infty$, $0 < \beta \leq 2$, 且有 $EX_n = 0$, 其中 $\{a_n, n \geq 1\}$ 是非降趋于无穷的正常数序列, 则强大数定律 $a_n^{-1} \sum_{i=1}^n X_i \rightarrow 0$ a.s. 成立.

证明 由定理 1 直接得出结论.

推论 2 设 $\{X_n, n \geq 1\}$ 是满足式 (1) 的两两NQD列, $S_n = \sum_{k=1}^n E(|X_k|^\beta)$, $0 < S_n \uparrow \infty$, $0 < \beta \leq 2$, 且 $EX_n = 0$, 若存在单调递增的函数 $f: R_+ \rightarrow R_+$, 使得 $\int_0^\infty \frac{dx}{f^\beta(x)} < \infty$, 则强大数定律 $f^{-1}(S_n) \sum_{k=1}^n X_k \rightarrow 0$ a.s. 成立.

证明 由

$$\sum_{n=1}^{\infty} E\left(\frac{|X_n|^\beta}{f^\beta(S_n)}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} f^{-\beta}(S_n)(S_n - S_{n-1}) \leq$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_{S_{n-1}}^{S_n} \frac{dx}{f^{\beta}(x)} < \infty$$

及推论1即得.

推论3 设 $\{X_n, n \geq 1\}$ 是满足式(1)的两两NQD列, $\{a_n, n \geq 1\}$ 是非降趋于无穷的正常数序列, $\{b_n, n \geq 1\}$ 是正常数序列, 且 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n < \infty$,

$EX_n=0$, 若存在 $r \geq 2$, 使得

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n^{1-\frac{r}{2}} E\left(\frac{|X_n|^r}{a_n^r}\right) < \infty,$$

则强大数定律 $a_n^{-1} \sum_{k=1}^n X_k \rightarrow 0$ a.s 成立.

证明 $r=2$ 时, 由推论1结论成立. 现设 $r>2$, 记

$$h_n = \left(E \frac{|X_n|^r}{a_n^r} \right)^{\frac{2}{r}},$$

于是有

$$\{h_n > b_n\} = \left\{ \left(\frac{h_n}{b_n} \right)^{1-\frac{r}{2}} < 1 \right\} = \left\{ \left(E \frac{|X_n|^r}{a_n^r} \right)^{\frac{2}{r}-1} < b_n^{1-\frac{r}{2}} \right\},$$

从而有

$$\begin{aligned} h_n &= h_n I\{h_n \leq b_n\} + h_n I\{h_n > b_n\} \leq \\ & b_n + \left(E \frac{|X_n|^r}{a_n^r} \right)^{\frac{2}{r}-1} \cdot E \left(\frac{|X_n|^r}{a_n^r} \right) I\{h_n > b_n\} \leq \\ & b_n + b_n^{1-\frac{r}{2}} E \left(\frac{|X_n|^r}{a_n^r} \right), \end{aligned}$$

由假设可得

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(E \frac{|X_n|^r}{a_n^r} \right)^{\frac{2}{r}} = \sum_{n=1}^{\infty} h_n \leq \sum_{n=1}^{\infty} b_n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n^{1-\frac{r}{2}} E \left(\frac{|X_n|^r}{a_n^r} \right) < \infty.$$

又因为

$$E \frac{|X_n|^2}{a_n^2} \leq \left(E \frac{|X_n|^r}{a_n^r} \right)^{\frac{2}{r}},$$

由推论1, 结论成立.

参考文献:

- [1] LEHMANN E L. Some concepts of dependence[J]. Ann Math Statist, 1966, 43(3):1137-1153.
- [2] JOAG-DEV K, PROSCHAN F. Negative association of random variables with applications[J]. Ann Statist, 1983, 11(1):286-295.
- [3] MATULA P. A note on the almost sure convergence of sums of negatively dependent random variables[J]. Statist Probab Lett, 1992, 15(3):209-213.
- [4] WANG Y B, SU C, LIU X G. On some limit properties for pairwise NQD sequences[J]. Acta Math Appl Sinica, 1998, 21(3):404-414.
- [5] WANG Y B, YAN J G, CAI X Z. On the strong stability for Jamison type weighted product sums of pairwise NQD series with different distribution [J]. Chinese Ann Math, 2001, 22A: 701-706.
- [6] WU Q Y. Convergence properties of pairwise NQD random sequences [J]. Acta Math Sinica, 2002, 45 (3): 617-624.
- [7] 陈平炎. 两两NQD列的强大数定律[J]. 数学物理学报:A辑, 2005, 25(3):386-392.

A Strong Law of Large Number for Pairwise NQD Series

MA Hai-jun, GAO Ping, WANG Yuan-fang

(School of Mathematics and Computer Science, Hubei University, Wuhan 430062, China)

Abstract: Under certain conditions, to research the strong law of large Number for pairwise NQD series of different distributions, obtained the new results. Moreover, studies the convergence properties of pairwise NQD random sequences with different distributions.

Key words: strong law of large numbers; pairwise NQD series; distribution

(责任编辑: 强士端)