

# 地面搜索问题的数学模型

吴秀君<sup>1</sup>, 吴泽君<sup>2</sup>, 吴亚平<sup>1</sup>, 蔡琼<sup>1</sup>, 韩海<sup>1</sup>

(1.江汉大学 数学与计算机科学学院, 武汉 430056; 2.中国建设银行湖北省分行信息技术部, 武汉 430015)

**摘要:**建立了地面搜索的优化路径模型,使救援工作在大地震造成影响的前提下,保证耗时最短.模型中,将搜索问题转化为一个近似的哈密尔顿问题,即把每个方格中心看作图中的点,设计出总路程最短且每个人尽可能均衡的搜索路线.从实际角度出发,假定采用“接力”方式向组长报告信息,得到一条从起点处出发集结于左侧中点的“一笔画”路径.

**关键词:** H回路 (Hamilton回路); 近似解法; 模型

**中图分类号:** O243 **文献标识码:** A **文章编号:** 1673-0143(2009)01-0019-05

## 1 问题的背景及重述

### 1.1 问题背景

5.12汶川大地震使震区地面交通和通讯系统严重瘫痪.无疑是对中国的一次严峻考验,它造成人员的伤亡实属罕见.地震一发生,救灾指挥部紧急派出多支小分队,到各个指定区域执行搜索任务,以确定需要救助的人员的准确位置.国务院温总理立即奔赴前线指导营救工作.“只要有1%的生还希望,我们会尽100%的努力”这句话感动世界.的确,生命是最宝贵的,在通讯几乎崩溃的情况下,如何营救幸存者已刻不容缓.为了减少伤亡,就必定要制定好搜索队伍的行进路线,于是问题便提升为:如何制定一种耗时最短的搜索方式,使得搜索工作有效的进行.

### 1.2 问题叙述

有一个平地矩形目标区域,大小为 $11\,200\text{ m} \times 7\,200\text{ m}$ ,需要进行全境搜索.假设:出发点在区域中心;搜索完成后需要进行集结,集结点(结束点)在左侧短边中点;每个人搜索时的可探测半径为 $20\text{ m}$ ,搜索时平均行进速度为 $0.6\text{ m/s}$ ;不需搜索而只是行进时,平均速度为 $1.2\text{ m/s}$ .每个人带有GPS定位仪、步话机,步话机通讯半径为 $1\,000\text{ m}$ .

现在有如下问题需要解决:假定有一支20人一组的搜索队伍,拥有1部卫星电话.请设计一

种你认为耗时最短的搜索方式.按照你的方式,搜索完整个区域的时间是多少?能否在48 h内完成搜索任务?如果不能完成,需要增加到多少人才可以完成?

## 2 模型假设

地震后通讯以及搜救工作正常进行;  
地震后地面的情况不会影响搜索速度;  
救援人员在搜救过程中不会出现安全事故;  
探测仪不会出现故障;  
地震后的天气变化不会影响搜救速度;  
搜救人员发现、汇报、处理问题所需时间不作考虑.

## 3 问题分析

由问题知每个人搜寻半径为 $20\text{ m}$ ,可搜索宽度为 $40\text{ m}$ ,由于只有一部卫星电话,在有效通讯半径 $1\,000\text{ m}$ 内,20人可排成“一字”列队搜索,其搜索宽度为 $800\text{ m}$ .而 $800$ 为设定的待搜索矩形区域的长与宽的最大公约数,即 $(11\,200, 7\,200) = 800$ .因此,为简化问题,可将 $11\,200 \times 7\,200$ 的区域首先分成 $800 \times 800$ 的小方块,则有 $14 \times 9$ 个小方格(边长代表 $800\text{ m}$ )(如图1,其中★表示出发点).

无论采用何种方式和路线搜索,任务完成的时间以耗时最多的组员进行计算.因此组员分配

收稿日期: 2008-12-04

作者简介: 吴秀君(1969-),女,湖北天门人,副教授,博士,主要从事决策理论和最优化理论研究.

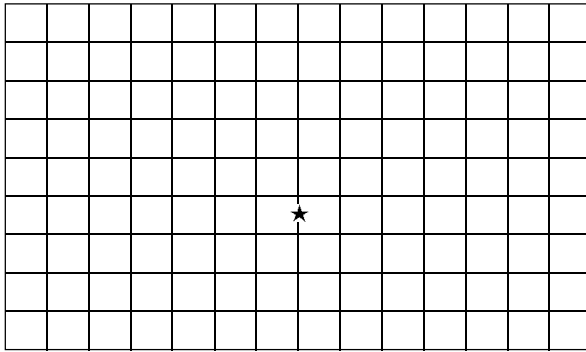


图1 区域划分为14×9个800×800方格

任务越均衡, 组员完成任务的最长时间就越短, 整个队伍完成任务的时间也就越短.

完成任务的时间分为四部分: 一是从出发点点到开始搜索地点的时间; 二是搜索完毕后返回集结点的时间; 三是实际进行的纯搜索时间; 四是在搜索进行中改变队形或者转场(连接两次搜索中的非搜索行进称为转场)时间. 因此路线设计优化可从两方面着手: 一是尽可能减少非搜索耗时; 二是尽可能减少搜索耗时, 即少走重复路. 如果把搜索区域看成用半径为20 m的圆去覆盖, 则要寻找一条路线, 使覆盖的重叠区域尽可能少. 结合两方面对路线进行选择和优化.

### 4 20人一组的最优搜索

#### 4.1 自由起点和终点的完全搜索

问题1 把每个方格中心看作图中的点, 寻找经过每点一次且仅一次的最短路径. 为简化问题, 先假设起点和终点不受限制. 顶点分布如图2, 以任意两顶点之间的实际距离为连接这两点的边赋权.

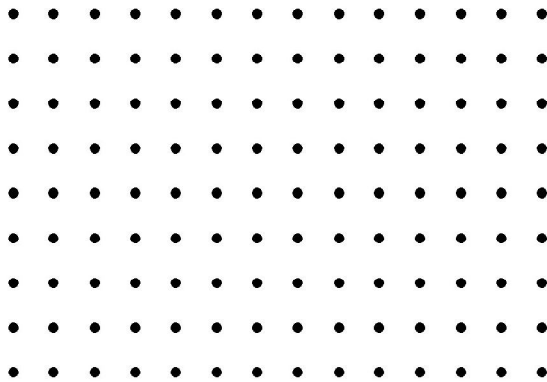


图2 14×9的点阵分布图

下面先给出若干定义.

定义1 经过图G中每个顶点1次且仅1次

的路称为哈密尔顿路.

定义2 权最小的哈密尔顿路称为最佳哈密尔顿路.

将点阵中的点看成顶点, 任意两点间的线段长度看成相应两顶点的边长, 我们要寻找最佳哈密尔顿路. 这是一个NP-完全问题, 该问题的最优精确解法有许多种, 如: 动态规划法、分枝定界法、最小生成树算法、分配问题法等, 但都仅适用于网络图中的顶点不太多情形, 否则都将遇到“组合爆炸”而不可行. 而以上问题中即使把每个网格视为一个点, 也有 $14 \times 9 = 126$ 个点, 若要去寻找最优解, 势必将遇上“组合爆炸”.

由于最短的搜索时间等于任务平均分配时的搜索时间, 因此可先把这一组的行为凝结成一人的行进路线, 而得到“一笔画”路径(见图3).

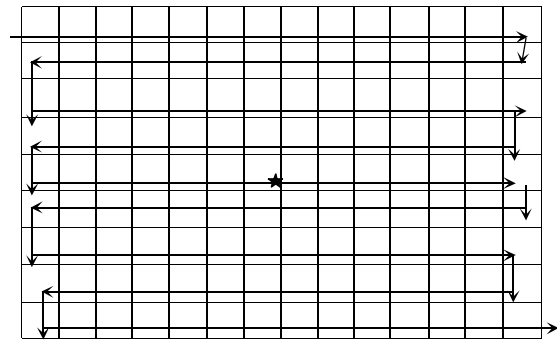


图3 经过每格中心点1次且仅1次的“一笔画”路径

我们把这种路线称为主干线.

问题2 上述“一笔画”路径能否完全覆盖矩形区域.

显然在拐角处搜索覆盖的范围是一个半径为20 m的圆, 它是边长为40 m的正方形的内切圆, 因此不能覆盖拐角的阴影部分(见图4).

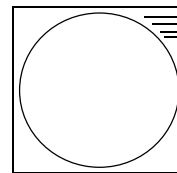


图4 拐角不能被覆盖示意图

实际上, “一笔画”搜索路径未能覆盖的搜索面积为:  $20 \times 16 \times \text{阴影面积} = 20 \times 16 \times (20 \times 20 - 3.14 \times 20 \times 20 \times 1/4) = 27520 \text{ (m}^2\text{)}$ , 占总面积的  $27520 / (11200 \times 7200) = 0.000341 = 0.0341\%$ . 由于仅有0.0341%的面积未能被“一笔画”路径搜索到,

而且该路径的全部时间都用于搜索,因此决定在该路径的基础上进行完善,达到各种要求.

**问题3** 拐角的“不能完全覆盖”的搜索修正.

为了克服每次行进到拐角时边长为20m的正方形不能被 $90^\circ$ 的半径为20m的扇形完全覆盖的问题,采用如下方式进行修正:

**命题1** (1) 沿对角线方向搜索( $20\sqrt{2}-20=8.28$ )m,再以1.2m/s的速度行进回到出发点的路径(见图5),为从左下角顶点出发回到该点的覆盖拐角部分的最省时间路径,一个拐角的耗时为0.0575h.

(2) 按图3中“一笔画”路径进行拐角处的修正后,20人一组的总搜索耗时为46.80h.

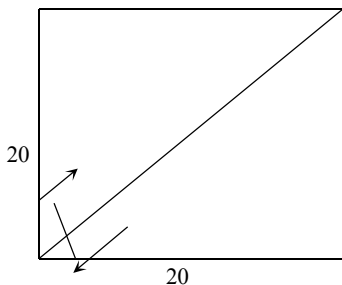


图5 覆盖拐角的最优路径设计

**证明** (1) 一个拐角延伸搜索后折返的耗时为

$$T = \frac{20\sqrt{2}-20}{0.6 \times 3600} + \frac{20\sqrt{2}-20}{1.2 \times 3600} = 0.00575 \text{ (h)}.$$

(2) 修正后的总时间等于16个拐角的耗时再加干线上20人中的最长的搜索耗时.而图3的“一笔画”中,干线上20人中每个人搜索的路径长度一样,都等于 $800 \times 9 \times 14 = 100800$ (m),而其中在起点和终点处各可以少搜索20m,而改为行进,因而

$$16 \text{ 个拐角耗时: } T_{16} = 16 \times 0.00575 = 0.092 \text{ (h)},$$

$$\text{干线耗时: } T_1 = \frac{800 \times 9 \times 14 - 40}{0.6 \times 3600} = 46.6667 - 0.018519 = 46.64815 \text{ (h)},$$

起点和终点行进40m耗时:

$$T_2 = \frac{40}{1.2 \times 3600} = 0.037037 \text{ (h)},$$

$$T = T_{16} + T_1 + T_2 = 0.092 + 46.6667 + 0.037037 = 46.7957 \text{ (h)}.$$

为了探讨路线优劣,我们定义理想搜索时间.

**定义3** 理想搜索时间 =  $\frac{\text{矩形的长} \times \text{矩形的宽}}{\text{搜索宽度} \times \text{搜索速度}}$ .

显然理想的搜索时间是根据搜索宽度将区域

分成若干个带型,而带型的总长度除以搜索速度,即可完成整个区域的搜索.这个过程显然没有考虑一个带型搜索结束到下一个带型搜索开始之间的非搜索用时,因此是一种理想状况.根据人数的不同,我们有

**命题2** (1) 1人完成全部搜索任务的理想搜索时间为930h;

(2) 20人完成全部任务的理想搜索时间为46.5h;

(3) 50人完成全部任务的理想搜索时间为18.6h.

**证明**

$$(1) \frac{11200 \times 7200}{40 \times 0.6 \times 3600} - \frac{40 \times 7200}{40 \times 0.6 \times 3600} = 933.3333 - 3.3333 = 930 \text{ (h)};$$

$$(2) \frac{930}{20} = 46.5 \text{ (h)};$$

$$(3) \frac{930}{50} = 18.6 \text{ (h)}.$$

**定义4** 搜索效率 =  $\frac{\text{纯搜索耗时}}{\text{总搜索时间}} \times 100\%$ .

**命题3** 按图3中“一笔画”路径进行拐角处的修正后,20人一组的搜索效率为99.36%,比理想搜索时间多0.3h.

**证明** 根据定义4和上述计算数据,搜索效率为  $\frac{46.64815}{46.8} \times 100\% = 99.68\%$ .

和理想搜索时间相比多出了:

$$46.8 - 46.5 = 0.3 \text{ (h)}.$$

#### 4.2 指定起点和终点的完全搜索

下面考虑从长方形的中心出发到短边终点集结的完全搜索问题.显然要尽量节约非搜索用时,才能提高搜索效率,缩短完成任务时间.由4.1知,“一笔画”路径的搜索效率是非常高的,因此我们将寻找从中心出发而回到集结点的“一笔画”路径.另外,不同的“一笔画”都可以遍历所有的格,但在拐角处要增加搜索时间,因此问题转化为探索拐弯次数最少的、从中心出发且回到集结点的路径.

下面考虑搜索开始的铺开队形.

**4.2.1 最优搜索起点设定** 假定O为中心点,且O点正好位于方格一边的中点,则20人一字形排开的队形可选择的起点有如下几种可能:

(1) 从O点出发,沿AB边铺开,准备搜索,其中1人所行走的最长距离为380m;

(2) 从O点出发,沿AD边铺开,准备搜索,

其中1人所行走的最长距离为 $\sqrt{400^2+(800-20)^2}$  m;

(3) 从O点出发,沿CD边铺开,准备搜索,其中1人所行走的最长距离为 $\sqrt{400^2-(800-20)^2}$  m (见图6).

(4) 从O点出发,沿BC边铺开的情形同AD.

其余的起点选择显然劣于上述4种情况中的最好者.

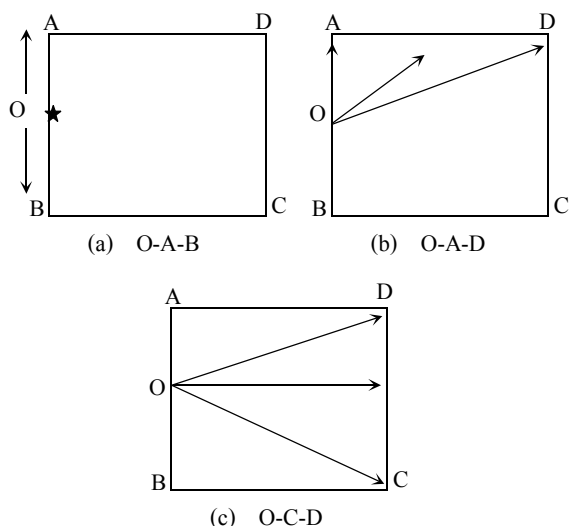


图6 20人一组的搜索初始起点选择

经过比较,显然选择AB边为搜索起点最优,而行进的最长耗时为

$$\frac{380}{1.2 \times 3600} = 0.087963 \text{ (h)}.$$

因此有

**命题4** 最优的起点应选择在AB边,即从中心出发直接铺开,最远行进距离380 m,组员行进的最长耗时为0.087 963 h.

4.2.2 最优搜索终点设定 搜索完毕的终结点的选择标准,是使搜索完毕后回集结点的时间最短.类似起点的选择可证明,最终搜索完毕终点最优选择在方格中集结点F所在边GH上(见图7).

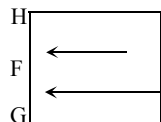


图7 搜索完毕的最优行进方向

因此有

**命题5** 最优的搜索终点应在集结点所在边GH上,从搜索完毕到集结点的组员最远行进距离为380 m,组员行进的最长耗时为0.087 963 h.

4.2.3 起点和终点确定后的“一笔画”路径设计 若起点在区域中心,返回集结点在左侧终点,则可设计如下搜索方案:小组20人在中心位置先沿垂直方向展开成“一字”形,所需行进路程分别为0, 20, 40, 60, ..., 380 m,到达指定位置后开始沿搜索路径搜索,在每个拐角处采用延伸搜索( $20\sqrt{2}-20$ ) m后原路行进返回主干线,继续搜索,途中有一次对换位置,对换搜索路径的规则是1号与20号对换,2号与19号对换, ..., 依次类推,搜索完毕后返回集结点(见图8).

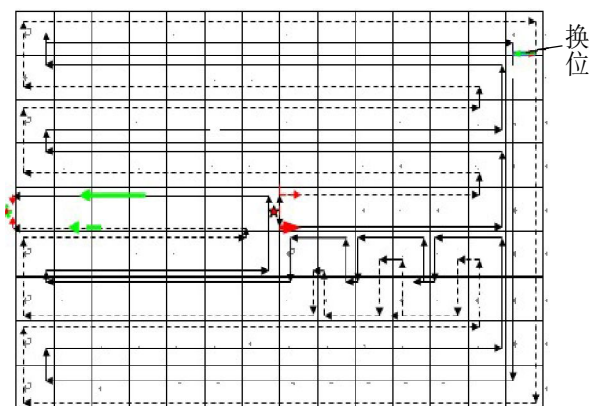


图8 中心出发左侧终点集结的路径及换位

在“一字”排开的搜索方式中,实线和虚线分别代表了“一字”搜索中排在两端的组员的搜索路径,经过计算,实线与虚线都有28个拐弯点,共耗时

$$0.00575 \times 28 = 0.161 \text{ (h)},$$

实线纯搜索路径长度为

$$98 \times 800 + 26 \times 780 + 30 \times 20 = 99280 \text{ (m)},$$

实线非搜索主路径长为

$$380 + 380 = 760 \text{ (m)},$$

实线共耗时

$$\frac{99280}{0.6 \times 3600} + \frac{760}{1.2 \times 3600} + 28 \times 0.00575 =$$

$$45.96296 + 0.175926 + 0.161 = 46.2999 \text{ (h)},$$

虚线纯搜索主路径长度为

$$98 \times 800 + 30 \times 780 + 26 \times 20 = 102320 \text{ (m)},$$

虚线非搜索路径长

$$380 + 380 = 760 \text{ (m)},$$

虚线共耗时

$$\frac{102320}{0.6 \times 3600} + \frac{760}{0.2 \times 3600} + 0.161 =$$

$$47.37037 + 0.175926 + 0.161 = 47.7073 \text{ (h)}.$$

4.2.4 基于换位策略的进一步调整 图8中实线和虚线的搜索主路径相差

$$102320 - 99280 = 3040 \text{ (m)}.$$

由于一个拐弯外径和内径相差

$$(780-20) \times 2 = 1520 \text{ (m)}.$$

因此实线和虚线的搜索路径相差2个拐弯的内外径差. 在搜索完第1行第14列所在格后, 虚线路径比实线路径多搜索1520 m. 因此, 搜索完这一格后, 谁先到达图中的换位区域, 则进行换位: 1号与20号的路线对调, 2号与19号的路线对调, 依此类推. 调整后可节约搜索时间为

$$\frac{1520}{0.6 \times 3600} - \frac{760}{1.2 \times 3600} = 0.703704 - 0.1759 = 0.5278 \text{ (h)},$$

完成任务的实际总耗时为

$$47.7073 - 0.5278 = 47.1795 \text{ (h)}.$$

于是有

**命题6** 起点在区域中心, 集结点在区域一边中点的初步设计方案的搜索总耗时为47.1795 h.

4.2.5 方案评价 换位策略可以将组中各人员的搜索路径调整到完全相等, 而任务均衡时的搜索效率是最高的. 本文设计的方案搜索效率达到99%以上, 是误差很小的近似最优解. 具体数据见表1.

表1 20人搜索方案的搜索效率

	理想状态	20人自由起点自由终点	20人指定起点和终点不换位	20人指定起点和终点换位
搜索效率/%	100	99.36	99.52	99.14

对于自由起点和终点的搜索问题, 我们基于以下5点设计, 使各组员之间的搜索时间均衡:

①对搜索起点和初始方向进行选择优化; ②对搜索终点及回集结点的方向进行选择优化; ③采用一笔画路径使搜索尽量不走重复路; ④对拐角搜索不到的区域, 采取斜45°方向延伸搜索后, 再采用行进返回的方式进行修正; ⑤在主干线上适当地点交换组员间的搜索路线, 使各组员的任务更均衡. 最终用我们的设计方案, 得到了问题的

误差很小的近似最优解, 可在47.1795 h内完成任务.

#### 参考文献:

- [1] 殷剑宏, 吴开亚. 图论及其算法[M]. 合肥: 中国科学技术出版社, 2004.
- [2] 谢政. 网络算法与复杂性理论[M]. 长沙: 国防科技大学出版社, 2003.
- [3] 杨胤清, 童强, 詹小英. 灾情巡视最佳路线模型[J]. 四川师范学院学报: 自然科学版, 1999, 20(1): 66-73.
- [4] 罗卢杨, 尤继东, 唐小军, 等. 灾情巡视路线寻优模型[J]. 数学的实践与认识, 1999, 29(1): 66-72.

## Mathematical Model of Ground Searching

WU Xiu-jun<sup>1</sup>, WU Ze-jun<sup>2</sup>, WU Ya-ping<sup>1</sup>, CAI Qiong<sup>1</sup>, HAN Hai<sup>1</sup>

(1. School of Mathematics & Computer Science, Jiangnan University, Wuhan 430056, China;

2. Department of Information Technology, China Construction Bank, Hubei Branch, Wuhan 430015, China)

**Abstract:** The ground searching path models are established and optimized to ensure the shortest time-consuming for rescue in earthquake. In the model, changes the searching problem into the problem which is similar to Hamilton, that is, the center of each grid is regarded as point, then designs the searching route that the total route is shortest and each person is balance as possible. From a practical point of view, it is assumed to use the way of "relay" to report the information to the group leader, then obtains the "one stroke" path from starting point and concentrates on the midpoint of left side.

**Key words:** Hamilton loop; approximate solution; model