第43卷 第4期
2015年8月

江汉大学学报(自然科学版)
J. Jianghan Univ.(Nat. Sci. Ed.)

Vol.43 No.4
Aug. 2015

一般对称群共轭类中几个问题的初步研究

郭黎丹，胡晓莉*
(江汉大学　数学与计算机科学学院，湖北　武汉　430056)

摘　要：证明了一般对称群的共轭类完全由 n 的着色划分来确定的结论，并计算了一般对称群中每个共轭类所含元素的个数。

关键词：一般对称群；共轭类；划分；划分函数
中图分类号：O152.1　　**文献标志码**：A　　**文章编号**：1673-0143(2015)04-0297-03
DOI：10.16389/j.cnki.cn42-1737/n.2015.04.002

Discussion on Some Problems of Conjugacy Classes of Generalized Symmetric Group

GUO Lidan, HU Xiaoli*
(School of Mathematics and Computer Science, Jianghan University, Wuhan 430056, Hubei, China)

Abstract: It is proved that the conjugacy classes of generalized symmetric group are determined by the colored partitions of n, then calculates the cardinality of each conjugacy class.

Keywords: generalized symmetric group; conjugacy class; partition; colored partition function

0　引言

对称群在群论中占据极为重要的地位，它是表示理论的重要研究领域之一。由Cayley定理可知，每个有限群都同构于某个对称群的子群。因此，把对称群及其他子群的结构问题研究清楚，则所有有限群的结构也随之解决。另外，对称群对物理和化学上的研究都发挥着重要的作用。其晶体学上的很多问题都是通过对称群及其子群来研究的。随着研究的进一步深入，往往需要考虑更一般的对称群，通常所用到的一般对称群就是用一个有限群去半直积上对称群。早在1995年，MACDONALD[1]给出了一般对称群特征标表的计算。

群的元素可以被分割成若干不相交的共轭类的并，因为同一个共轭类上的元素具有很多共同的属性，并且从群的共轭类可以看出很多关于它们结构上的重要特征。因此研究一般对称群的共轭类具有非常重要的现实意义。我们已经知道对称群的共轭类完全由 n 的划分来确定，而本文把这一结论推广到了一般对称群上，详细地给出了一般对称群的共轭类与 n 的着色划分之间存在一一对应关系。

1　预备知识

定义1[2-3]　从集合 $\{1, 2, \cdots, n\}$ 到集合 $\{1, 2, \cdots, n\}$ 的一个双射被称为一个 n 阶置换。所有 n 阶置换构成的集合是一个群，被称为 n 阶对称群，记为 S_n。

收稿日期：2015-04-21
基金项目：国家数学天元基金项目(11426116)
作者简介：郭黎丹(1994—)，女，研究方向：数学与应用数学。
***通讯作者**：胡晓莉(1984—)，女，讲师，博士，研究方向：代数。E-mail：xiaolihumath@163.com

定义2[2] 由一些非负整数构成的一个非递增序列 $\lambda=(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_l)$，若其中只含有限个零，则称 λ 为一个划分。若 $\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_l=n$，则称 λ 是 n 的一个划分。有时候也表示成 $\lambda=(1^{m_1}2^{m_2}\cdots n^{m_n})$，其中 m_i 为非负整数，表示划分 λ 中有 m_i 个部分等于 i。$l(\lambda)=l$ 称为 λ 的长度，$|\lambda|=\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_l$ 称为划分 λ 的权。

n 阶置换可以表示成 $\sigma=\begin{pmatrix}1 & 2 & \cdots & n\\ j_1 & j_2 & \cdots & j_n\end{pmatrix}$ 的形式，其中 $j_1j_2\cdots j_n$ 为 $1,2,\cdots,n$ 的一个排列，σ 表示把 i 映射到 j_i。n 阶置换也可以写成若干不相交循环置换的乘积 $\sigma=\sigma_1\sigma_2\cdots=(a_1a_2\cdots a_{l_1})(b_1b_2\cdots b_{l_2})\cdots$，其中循环置换 $\sigma_1=(a_1a_2\cdots a_{l_1})$ 表示把元素 a_i 映射到元素 $a_{i+1}(i=1,2,\cdots,l_1-1)$，把 a_{l_1} 映射到 a_1。正整数 l_i 叫做循环置换 σ_i 的长度，记为 $l(\sigma_i)=l_i$。我们把 $(l(\sigma_1),l(\sigma_2),\cdots)$ 叫做置换 σ 的循环形式，简称为 σ 的型。易知 $(l(\sigma_1)+l(\sigma_2)+\cdots=n$，若把 $l(\sigma_1),l(\sigma_2),\cdots$ 按非递增的顺序排列，则得到 n 的一个划分。

定义3[2] 任意给定对称群 S_n 中的两个元素 σ 和 τ，若存在 S_n 中的一个元素 π，使得 $\tau=\pi\sigma\pi^{-1}$，则称 σ 与 τ 是共轭的。

共轭给出了对称群 S_n 中元素的一个等价关系，从而给出了 S_n 中元素的一个分类。由共轭关系所确定的 S_n 的一个等价类叫做 S_n 的一个共轭类。

引理1[4] （Ⅰ）对称群 S_n 中的两个元素是共轭的当且仅当它们具有相同的型，即对称群的共轭类与 n 的划分一一对应。

（Ⅱ）S_n 中型为 $\lambda=(1^{m_1}2^{m_2}\cdots n^{m_n})$ 的共轭类中所含元素个数为 $\dfrac{n!}{1^{m_1}2^{m_2}\cdots n^{m_n}m_1!\cdots m_n!}$。

注：通常记 $z_\lambda=\prod\limits_{i=1}^{n} i^{m_i}m_i!$；设 c 为 Γ 的一个共轭类，记 $\zeta_c={|G|}/{|c|}$，并称它为 c 中一个元素的中心化子的阶，其中 $|X|$ 表示集合 X 中所含元素个数。

2 一般对称群的共轭类

设 Γ 为有限群，$\Gamma^n=\Gamma\times\Gamma\times\cdots\times\Gamma$ 为 Γ 的 n 次直积。对称群 S_n 在 Γ^n 上的作用定义为：

$$\sigma(g_1,g_2,\cdots,g_n)=(g_{\sigma^{-1}(1)},g_{\sigma^{-1}(2)},\cdots,g_{\sigma^{-1}(n)})。$$

定义4[1] 设 Γ 为有限群，则 Γ^n 与对称群 S_n 的半直积被称为一般对称群，记为 $\Gamma_n=\Gamma\sim S_n$，也称为 Γ 与 S_n 的圈积（wreath product）。

一般对称群 Γ_n 的元素形式为 (g,σ)，其中 $g=(g_1,g_2,\cdots,g_n)$，$g_i\in\Gamma$，$\sigma\in S_n$。任意给定 (g,σ)，$(h,\tau)\in\Gamma_n$，其乘法定义为 $(g,\sigma)\cdot(h,\tau)=(g\cdot\tau(h),\sigma\tau)$。特别地，当 $\Gamma=1$ 时，Γ_n 就是对称群 S_n。易知，$|\Gamma_n|=|\Gamma^n|\cdot|S_n|=|\Gamma|^n n!$。

定义5[3-4] 设 $X=\{x_1,x_2,\cdots,x_k\}$ 为一有限集合，$\rho(x_i)$ 表示被第 x_i 着色了的划分，把 $\rho=(\rho(x))_{x\in X}=(\rho(x_1),\rho(x_2),\cdots,\rho(x_k))$ 称为被 X 着色的一个着色划分，$l(\rho)=\sum\limits_{x\in X}l(\rho(x))$ 称为 ρ 的长度，$\|\rho\|=\sum\limits_{x\in X}|\rho(x)|$ 称为 ρ 的权。

设 $\Gamma_*=(c_1,c_2,\cdots,c_r)$ 为有限群 Γ 的所有不等价的共轭类构成的集合。任意给定 $(g,\sigma)\in\Gamma_n$ $(g=(g_1,g_2,\cdots,g_n)$，$g_i\in\Gamma$，$\sigma\in S_n)$，把 σ 写成不相交的循环置换的乘积形式：$\sigma=\sigma_1\sigma_2\cdots$。设 $\sigma_i=(j_1j_2\cdots j_{k_i})$，则有 $g_{\sigma_i}=g_{j_{k_i}}\cdots g_{j_2}g_{j_1}\in\Gamma$，$g_{\sigma_i}$ 落在 Γ 的哪个共轭类里完全由 g 与 σ_i 来决定，由此它被叫做 (g,σ) 对应于循环置换 σ_i 的循环积。设 $c\in\Gamma_*$，令 $m_k(c)$ 表示 σ 中循环长度为 k 并且其循环积落在共轭类 c 中循环置换的个数，那么 $\sum\limits_{k,c}km_k(c)=n$。令 $\rho(c)=(1^{m_1(c)}2^{m_2(c)}\cdots)$，则 $\rho(c)$ 为被共轭类 c 着色了的划分，从而 $\rho=(\rho(c))_{c\in\Gamma_*}$ 是被 Γ 的共轭类集 Γ_* 着色的一个着色划分，并且权为 n。由 (g,σ) 和 Γ_* 确定的着色划分 $\rho=(\rho(c))_{c\in\Gamma_*}$ 被叫做元素 (g,σ) 的型。

例如：$\Gamma=\langle a|a^6=1\rangle$ 为一个6阶循环群，则 $\Gamma_*=\{1,a,a^2,a^3,a^4,a^5\}$，$\Gamma_6=\Gamma^6\sim S_6$。考虑 $(g,\sigma)\in\Gamma_6$，其中 $g=(a^4,1,a^2,a^5,a^3,a)$，$\sigma=\sigma_1\sigma_2\sigma_3=(531)(62)(4)$，那么有

$$g_{\sigma_1}=a^5\cdot a^2\cdot a^4=a^5\in c_6\ ,\ g_{\sigma_2}=a\cdot 1=a\in c_2\ ,\ g_{\sigma_3}=a^5\in c_6\ 。$$

从而,由(g,σ)和Γ_*确定的着色划分为$\rho=((2)_{c_2},(31)_{c_6})$。

定理1　一般对称群Γ_n中的两个元素是共轭的当且仅当它们具有相同的型,即Γ_n的共轭类与被Γ_*着色的n的着色划分有着一一对应关系。

证明　1)先证Γ_n中两个共轭元具有相同的型。

① 设$\tau\in S_n$,则$\bar{\tau}=(1,\tau)\in\Gamma_n$,下面证明$\Gamma_n$中的任一元素$(g,\sigma)$与其共轭元$\bar{\tau}(g,\sigma)\bar{\tau}^{-1}$有相同的型。

$\bar{\tau}(g,\sigma)\bar{\tau}^{-1}=(\tau(g),\tau\sigma\tau^{-1})$,若$\pi=(j_1,j_2,\cdots,j_k)$是$\sigma$中的一个循环置换,那么$\tau\pi\tau^{-1}=(\tau(j_1),\tau(j_2),\cdots,\tau(j_k))$是$\tau\sigma\tau^{-1}$中的一个循环置换,从而易得循环积$g_\pi$与$g_{\tau\pi\tau^{-1}}$相等,故$(g,\sigma)$与$\bar{\tau}(g,\sigma)\bar{\tau}^{-1}$有着相同的型。

② 设$h=(h_1,h_2,\cdots,h_n)\in\Gamma^n$,则$\bar{h}=(h,1)\in\Gamma_n$。下面证明$\Gamma_n$中的任一元素$(g,\sigma)$与其共轭元$\bar{h}(g,\sigma)\bar{h}^{-1}$有相同的型。

$\bar{h}(g,\sigma)\bar{h}^{-1}=(hg\sigma(h^{-1}),\sigma)$,则$(hg\sigma(h^{-1}),\sigma)$中对应于循环置换$\pi=(j_1j_2\cdots j_k)$的循环积为

$$(h_{j_k}g_{j_k}h_{j_{k-1}}^{-1})(h_{j_{k-1}}g_{j_{k-1}}h_{j_{k-2}}^{-1})\cdots(h_{j_1}g_{j_1}h_{j_k}^{-1})=h_{j_k}(g_{j_k}\cdot g_{j_{k-1}}\cdots\cdot g_{j_1})h_{j_k}^{-1}\ ,$$

显然它与Γ中的元素$g_{j_k},g_{j_{k-1}},\cdots,g_{j_1}$是共轭的,即有循环积$g_\pi$与$hg\sigma(h^{-1})_\pi$相等,故$(g,\sigma)$与$\bar{h}(g,\sigma)\bar{h}^{-1}$具有相同的型。由①与②可知,$\Gamma_n$中两共轭的元素具有相同的型。

2)再证Γ_n中具有相同型的两个元素共轭。

设(g,σ),$(h,\tau)\in\Gamma_n$,且它们具有相同的型,那么σ与τ在S_n中具有相同的循环形式$\sigma_1\sigma_2\cdots$。由引理1可知,σ与τ在S_n中共轭,那么总可以选取合适的$\pi\in S_n$,使得$\sigma=\pi\tau\pi^{-1}$,而由1)中①的证明可知(h,τ)与$\bar{\pi}(h,\tau)\bar{\pi}^{-1}=(h,\sigma)$共轭。又由1)可知$(h,\tau)$与$(h,\sigma)$具有相同的型,因此不妨假设$\sigma=\tau$。从而$(g,\sigma)$与$(h,\tau)$落在$\Gamma_n$的同一个Young子群$\Gamma_\sigma=\Gamma_{l(\sigma_1)}\times\Gamma_{l(\sigma_2)}\times\cdots$中,也就是说它们在Young子群$\Gamma_\sigma$中是共轭的。从而只需要进一步考虑$\sigma=(12\cdots n)$的情况。当$\sigma=(12\cdots n)$时,由于$(g,\sigma)$与$(h,\sigma)$具有相同的型,故循环积$g_\sigma=g_ng_{n-1}\cdots g_1$与$h_\sigma=h_nh_{n-1}\cdots h_1$落在$\Gamma$的同一个共轭类中,也就是它们在$\Gamma$中共轭,则存在$d_n\in\Gamma$使得$g_\sigma=d_nh_\sigma d_n^{-1}$。对于$\Gamma$中的元素$g_i$与$h_i$ $(i=1,2,\cdots,n-1)$,总可以找到合适的d_1,d_2,$\cdots$,$d_{n-1}\in\Gamma$,使得

$$g_{n-1}=d_{n-1}h_{n-1}d_{n-2}^{-1}\ ,\ g_{n-2}=d_{n-2}h_{n-2}d_{n-3}^{-1},\cdots,g_1=d_1h_{n-1}d_n^{-1}\ ,$$

令$d=(d_1,d_2,\cdots,d_n)$,从而有$d(g,\sigma)d^{-1}=(h,\tau)$,即$(g,\sigma)$与$(h,\tau)$在$\Gamma_n$中共轭。

综上,定理1成立。

定理2　Γ_n中型为$\rho=(\rho(c))_{c\in\Gamma_*}$的共轭类所含元素个数为$\dfrac{n!}{\prod_{c\in\Gamma_*}z_{\rho(c)}}\cdot\dfrac{|G|^n}{\prod_{c\in\Gamma_*}\zeta_c^{l(\rho(c))}}$。

证明　设(g,σ)为Γ_n的型为$\rho=(\rho(c))_{c\in\Gamma_*}$的共轭类中的任一元素,其中$\rho(c)=(1^{m_1(c)}2^{m_2(c)}\cdots n^{m_n(c)})$,$\|\rho\|=n$。那么由引理1中的Ⅱ,可知$\sigma\in S_n$的选择方式共有$n!\Big/\prod_{i=1}^{n}i^{m_i}m_i!$种,其中$m_i=\sum_{c\in\Gamma_*}m_i(c)$。对每个选取的$\sigma\in S_n$和每个固定的$i\geqslant1$,共有$m_i!\Big/\prod_{c\in\Gamma_*}m_i(c)!$种方法来分配$\rho$中$m_i$个长度为$i$的循环置换。选取$\sigma$中长度为$i$的循环置换$\tau=(j_1j_2\cdots j_i)$,使其循环积$g_\tau=g_{j_i}g_{j_{i-1}}\cdots g_{j_1}$落在共轭类$c$中的元素$g(g_1,g_2,\cdots,g_n)$的选取共有$|G|^{i-1}\cdot|c|$种方法。从而型为$\rho$的共轭类所含元素个数为

$$\frac{n!}{\prod_{i=1}^{n}i^{m_i}m_i!}\cdot\prod_{i=1}^{n}\Big(\frac{m_i!}{\prod_{c\in\Gamma_*}m_i(c)!}\Big)\cdot\prod_{i=1}^{n}(|G|^{i-1}\cdot|c|)^{m_i}=\frac{n!}{\prod_{c\in\Gamma_*}\prod_{i=1}^{n}i^{m_i}m_i(c)!}\cdot|G|^{\sum_{i=1}^{n}im_i}\cdot\prod_{i=1}^{n}\Big(\frac{|c|}{|G|}\Big)^{m_i}=$$

$$\frac{n!}{\prod_{c\in\Gamma_*}z_{\rho(c)}}\cdot\frac{|G|^n}{\prod_{c\in\Gamma_*}\zeta_c^{\sum_{i=1}^{n}m_i(c)}}\ \ (l(\rho(c))=\sum_{i=1}^{n}m_i(c))=\frac{n!}{\prod_{c\in\Gamma_*}z_{\rho(c)}}\cdot\frac{|G|^n}{\prod_{c\in\Gamma_*}\zeta_c^{l(\rho(c))}}\ 。$$

故定理2成立。

(下转第302页)