利用一致收敛求和式极限

舒文豪，邝思颖，胡晓莉*
(江汉大学 人工智能学院,湖北 武汉 430056)

摘 要:和式极限是重要极限问题之一,在数学各分支领域有着广泛的应用。它复杂多样、灵活多变,通常没有固定的解题方法。一道关于函数列一致收敛性的考研题引发了笔者对函数列和式极限问题的思考。通过对和式极限进行适当的变形与整理,构造一致收敛函数,可以巧妙地解决一系列函数列和式极限问题。对所得结论给出了严谨的推理证明,为解决此类问题提供了一般性思路,并通过对典型例题的分析,从而更有利于初学者对此类问题的理解与把握。

关键词:一致收敛;和式极限;极限函数

中图分类号:O171 **文献标志码:**A **文章编号:**1673－0143(2023)04－0029－07

DOI:10.16389/j.cnki.cn42－1737/n.2023.04.004

The Limit of Sum Form Obtained by Uniformly Convergent

SHU Wenhao, KUANG Siying, HU Xiaoli*
(School of Artificial Intelligence, Jianghan University, Wuhan 430056, Hubei, China)

Abstract: The limit of sum form is one of the most important limit problem and has a wide range of applications in all branches of mathematics. It is complex, diverse, and flexible, and there is usually no fixed method to solve it. A postgraduate examination question about the uniform convergence of function sequences triggered the author to think about the limit of sum form with function sequences. By deforming and arranging the limit of the sum form properly and constructing the uniform convergence function, a series of the limit of the sum form with function sequence problems can be solved skillfully. We give rigorous reasoning proof to the conclusion and provide general ideas for solving such problems. Through the analysis of typical examples, it is helpful for beginners to understand and grasp such problems.

Key words: uniform convergence; limit of sum form; limit of function

0 引言

笔者先回顾2022年华东师范大学硕士研究生入学试题中关于函数列一致收敛性的一道试

收稿日期: 2022－05－16

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(11501251)

作者简介: 舒文豪(2001—),男,研究方向:人工智能。

***通信作者:** 胡晓莉(1984—),女,副教授,博士,研究方向:数学建模、代数和量子信息。E－mail:xxds@qq.com

题,然后拓展到我们所关心的函数列和式极限问题。注:全文中n为正整数,所考虑数域为实数域。

设$f(x)$为在$(-\infty,+\infty)$上的连续函数,令$f_n(x)=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n}f\left(x+\frac{k}{n}\right)$,其中$n=1,2,\cdots$。

① 证明函数列$\{f_n(x)\}$在$(-\infty,+\infty)$上处处收敛,并指出极限函数。

② 证明$\{f_n(x)\}$在任意有限闭区间$[a,b]$上一致收敛。

说明:该题的主要考点为函数列的一致收敛性,进一步思考可以发现这是一道可以推而广之的好题。

对于问题①,由于函数$f(x)$连续,给定$x_0\in(-\infty,+\infty)$,对区间$[x_0,x_0+1]$进行n等分。有$f_n(x_0)=\sum_{k=1}^{n}\frac{x_0+1-x_0}{n}f\left(x_0+\left(\frac{x_0+1-x_0}{n}\right)k\right)$。由定积分的定义得$\lim_{n\to+\infty}f_n(x_0)=\int_{x_0}^{x_0+1}f(t)\mathrm{d}t$。由于$x_0$是任意的,故$\lim_{n\to+\infty}f_n(x)=\int_{x}^{x+1}f(t)\mathrm{d}t$。因此,$f_n(x)$的极限函数为$\int_{x}^{x+1}f(t)\mathrm{d}t$。

对于问题②,由于

$$\left|f_n(x)-\int_{x}^{x+1}f(t)\mathrm{d}t\right|=\left|\sum_{k=0}^{n-1}\int_{x+\frac{k}{n}}^{x+\frac{k+1}{n}}\left[f\left(x+\frac{k}{n}\right)-f(t)\right]\mathrm{d}t\right|\leqslant\sum_{k=0}^{n-1}\int_{x+\frac{k}{n}}^{x+\frac{k+1}{n}}\left|f\left(x+\frac{k}{n}\right)-f(t)\right|\mathrm{d}t,\tag{1}$$

根据函数$f(x)$在闭区间$[x_0,x_0+1]$的连续性,故$f(x)$在$[x_0,x_0+1]$上一致连续。$\forall\varepsilon>0$,存在$\delta(\varepsilon)>0$,使得当$|x-y|<\delta$时,有$|f(x)-f(y)|<\varepsilon$。故任给$t\in\left[x+\frac{k}{n},x+\frac{k+1}{n}\right]$,当$\left|x+\frac{k}{n}-t\right|<\delta$时,有$\left|f\left(x+\frac{k}{n}\right)-f(t)\right|<\varepsilon$。此时,式(1)$\leqslant\sum_{k=0}^{n-1}\int_{x+\frac{k}{n}}^{x+\frac{k+1}{n}}\varepsilon\mathrm{d}t=\varepsilon\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{n}=\varepsilon$。实际上,此题的思想可应用到和式极限中,并且能够解决与此相关的一系列问题。

1 主要结论及证明

引理1 设函数序列$S_n(x)(n=1,2,\cdots)$在有限闭区间$[a,b]$上连续且一致收敛,$S(x)$为$S(x_n)$的极限函数,则对于$[a,b]$上的函数列$\{x_n\}$,都有$\lim_{n\to+\infty}|S_n(x_n)-S(x_n)|=0$。

证明 由文献[1]知,连续函数列一致收敛时,其极限函数是连续的。$S_n(x)$在有限闭区间$[a,b]$上一致收敛时,$\forall\varepsilon>0,\exists n>\mathrm{N},\forall x_n\in[a,b]$,都有

$$|S_n(x_n)-S(x_n)|\leqslant\sup_{n>\mathrm{N},x\in[a,b]}|S_n(x)-S(x)|\leqslant\varepsilon。$$

所以$\lim_{n\to+\infty}|S_n(x_n)-S(x_n)|=0$。

定理1 设$f(x)$在$[a,b]$上连续,$S_n(x)=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n}f\left(x+\frac{k}{n}\right)$。设有序列$x_n$满足$\lim_{n\to+\infty}x_n=x_0\in[a,b]$,若$\left[\inf x_n+\frac{1}{n},\sup x_n+1\right]\subseteq[a,b]$,有$S_n(x_n)=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n}f\left(x_n+\frac{k}{n}\right)$,故$\lim_{n\to+\infty}S_n(x_n)=\int_{x_0}^{x_0+1}f(t)\mathrm{d}t$。

证明 设数列$x_n=x_0+\phi_n$,其中$\lim_{n\to+\infty}\phi_n=0$。则由引理1可知,函数$S_n(x)$在任意有限闭

区间上都一致收敛。由引理1可得,当$x_n \in [x_0+\inf\phi_n, x_0+\sup\phi_n]$时,有

$$\lim_{n\to+\infty}\left|S_n(x_n)-S(x_n)\right|=0。$$

由于该闭区间上的连续函数是一致收敛的,由文献[1]知$S_n(x)$和函数$S(x)$在闭区间上连续,由Heine定理可得

$$\lim_{n\to+\infty}S_n(x_n)=S(x_0)=\int_{x_0}^{x_0+1}f(t)\mathrm{d}t。$$

推论1 若$S_n(x_n)=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n}f\left(x_n+\lambda\frac{k}{n}\right)$,其他条件与定理1相同,则有

$$\lim_{n\to+\infty}S_n(x_n)=S(x_0)=\int_{x_0}^{x_0+\lambda}f(t)\mathrm{d}t。$$

例1 求极限$\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{4n^2-k^2-1}}$。

解 $S_n(x_n)=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{4-\left(\frac{k}{n}-\frac{1}{n^2}\right)^2}}$,其中序列$x_n=-\frac{1}{n^2}$,$x_0=\lim_{n\to+\infty}x_n=0$,构造$f(t)=\frac{1}{\sqrt{4-t^2}}$。由推论1,$\lim_{n\to+\infty}S_n(x_n)=S(0)=\int_0^1\frac{1}{\sqrt{4-x^2}}\mathrm{d}x=\frac{\pi}{6}$。

引理2[2] 设$f(x),g(x)\in C[a,b]$,则$\lim_{\max\|\Delta x_k\|\to 0}\sum_{k=1}^{n}f(\xi_k)g(\eta_k)=\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x$。(文献[2]中的习题2193.1)

注:引理2说明只要$\max_{1\leqslant i\leqslant n}\|\Delta x_i\|$足够小,当分割点确定后,每个小区间上选取的两个点$\eta_k$与$\xi_k$是可以不同的,不需要像文献[1]中那样选取相同的分点,并且极限收敛到$\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x$。下述证明中,当分割给定时,$\omega_k^f=M_k-m_k$,其中$M_k=\sup_{[x_{k-1},x_k]}f(x)$,$m_k=\inf_{[x_{k-1},x_k]}f(x)$,其余$\omega_k^g$,$\omega_k^{f\cdot g}$含义以此类推。

证明 $\forall\varepsilon>0$,$\exists\delta_1$,使得$\|P_1\|=\max\|\Delta x_k\|<\delta_1$时,对$\forall\eta_k\in\Delta x_k$,都有$\sum_{k=1}^{n}\omega_k^g\Delta x_k\leqslant\varepsilon$;$\exists\delta_2$,使得$\|P_2\|<\delta_2$时,对$\forall\xi_k\in\Delta x_k$,都有$\sum_{k=1}^{n}\omega_k^f\Delta x_k\leqslant\varepsilon$。同理$\exists\delta_3$,使得$\|P_3\|<\delta_3$时,对$\forall\mu_k\in\Delta x_k$,都有$\sum_{k=1}^{n}\omega_k^{f\cdot g}\Delta x_k\leqslant\varepsilon$,即$\left|\sum_{k=1}^{n}f(\mu_k)g(\mu_k)\Delta x-\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x\right|<\varepsilon$。设$\left|f(x)\right|\leqslant M$,令$M+1=G$,从而取$\delta=\min\{\delta_1,\delta_2,\delta_3\}$,有

$$\left|\sum_{k=1}^{n}f(\xi_k)g(\eta_k)\Delta x_k-\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x+\sum_{k=1}^{n}f(\xi_k)g(\xi_k)\Delta x-\sum_{k=1}^{n}f(\xi_k)g(\xi_k)\Delta x\right|\leqslant$$

$$\varepsilon+\left|\sum_{k=1}^{n}f(\xi_k)g(\xi_k)\Delta x-\sum_{k=1}^{n}f(\xi_k)g(\eta_k)\Delta x\right|\leqslant$$

$$\sum_{k=1}^{n}\left|f(\xi_k)\right|\cdot\left|g(\eta_k)-g(\xi_k)\right|\Delta x_k+\varepsilon\leqslant G\sum_{k=1}^{n}\omega_k^g\Delta x_k+\varepsilon\leqslant(G+1)\varepsilon。$$

例2[3] 求极限$\lim_{n\to+\infty}\left(a^{\frac{1}{n}}-1\right)\sum_{k=1}^{n}a^{\frac{k}{n}}\sin\left(a^{\frac{2k-1}{2n}}\right)$。(文献[3]中例二)

解　$\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{n}{n}\left(a^{\frac{1}{n}}-1\right)\sum\limits_{k=1}^{n} a^{\frac{k}{n}}\sin a^{\frac{2k-1}{2n}} = \lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{a^{\frac{1}{n}}-1}{\frac{1}{n}}\right)\frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n} a^{\frac{k}{n}}\sin a^{\frac{2k-1}{2n}}$，由引理2可知，对于函数$f(x)=a^x$，对$[0,1]$上的$n$等分区间$\left[\frac{k-1}{n},\frac{k}{n}\right]$，取其右端点；对于函数$g(x)=\sin a^x$，对$[0,1]$上的$n$等分区间$\left[\frac{k}{n},\frac{k+1}{n}\right]$，取其中点$\eta_k=\frac{1}{2}\left(\frac{k-1}{n}+\frac{k}{n}\right)=\frac{2k-1}{2n}$，于是有

$$\lim_{n\to+\infty} S_n = \ln a \lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a^{\frac{k}{n}}\sin a^{\frac{2k-1}{2n}} = \ln a\int_0^1 a^x\sin a^x\,\mathrm{d}x = \cos 1-\cos a。$$

定义1　设x_{nk}为一个与n,k有关的序列，若$\forall\varepsilon>0,\exists\mathrm{N}$，使得当$n>\mathrm{N}$时，对任意的$k\in\{1,2,\cdots,n\}$，有$\left|x_{nk}\right|<\varepsilon$，则称序列$x_{nk}$为一致收敛于0的序列，也称序列$x_{nk}$是关于$k$一致收敛的。

注：事实上，根据引理2，可将定理1的结论推广到两个函数，甚至更多个函数的情形，在这里不做具体介绍。

定理2　设$S_n(x_n,y_n)=\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{n}f\left(x_n+\frac{k}{n}\right)g\left(y_n+\frac{k}{n}\right)$，$f(x)$和$g(x)$在闭区间$[a,b]$上连续，且对任意的$k\in\{1,2,\cdots,n\}$，有$x+\frac{k}{n}\in[a,b]$，则当$x_n,y_n$为一串收敛于某个实数$x_0$的序列时，有

$$\lim_{n\to+\infty} S_n(x_n,y_n)=\int_{x_0}^{x_0+1} f(t)g(t)\,\mathrm{d}t。$$

证明　当$x_n=y_n$时易证，下面只证明$x_n\neq y_n$的情况。因为$x_n+\frac{k}{n}\in[a,b]$且$f(x)$为连续函数，所以$\left|f\left(x_n+\frac{k}{n}\right)\right|\leqslant M$。因为$g(x)$在$[a,b]$一致连续，所以$\forall\varepsilon>0,\exists\delta$，使$\left|p-q\right|<\delta$时，$\left|g(p)-g(q)\right|<\varepsilon$，不妨取上述$\delta$，则存在$\mathrm{N}_1$，使得$n>\mathrm{N}_1$时，有$\left|x_n-y_n\right|<\delta$，且有$\left|g\left(y_n+\frac{k}{n}\right)-g\left(x_n+\frac{k}{n}\right)\right|<\varepsilon$。从而有

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left|f\left(x_n+\frac{k}{n}\right)g\left(y_n+\frac{k}{n}\right)-f\left(x_n+\frac{k}{n}\right)g\left(x_n+\frac{k}{n}\right)\right|\leqslant\frac{M}{n}\sum_{k=1}^{n}\left|g\left(y_n+\frac{k}{n}\right)-g\left(x_n+\frac{k}{n}\right)\right|\leqslant M\varepsilon。$$

注：不妨设函数f的自变量为$x_n+\alpha_{nk}$，其中α_{nk}是分割一定时，在每个小区间上选取的求和点。对于定理2，是将区间n等分，选取$\alpha_{nk}=\frac{k}{n}$，即为每个等分区间$\left[\frac{k}{n},\frac{k+1}{n}\right]$的左端点。由定理2及引理2可知，函数$f(x_n+\alpha_{nk})$，$g(y_n+\beta_{nk})$中的$\alpha_{nk},\beta_{nk}$可在等分区间$\left[\frac{k}{n},\frac{k+1}{n}\right]$任意取值。

推论2　设$S_n(x_n,y_n)=\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{n}f\left(x_n+\mu\frac{k}{n}\right)g\left(y_n+\mu\frac{k}{n}\right)$，其他条件与定理1相同。当$\lim\limits_{n\to+\infty}x_n=\lim\limits_{n\to+\infty}y_n=x_0$时，有$\lim\limits_{n\to+\infty}S_n(x_n,y_n)=\int_{x_0}^{x_0+\mu}f(t)g(t)\,\mathrm{d}t$，其中$\mu\neq0$。

推论3　设$S_n(x_n,y_n)=\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{n}f(x_n+\mu\alpha_{nk})g(y_n+\mu\beta_{nk})$，其他条件与定理1相同。若$x_n(k)$与$y_n(k)$均为关于$k$一致收敛到$x_0$的函数列，则对给定的分割在第$k$个区间上任选两点$\alpha_{nk},\beta_{nk}$，均有($\mu\neq0$)

$$\lim_{n\to+\infty} S_n(x_n(k),y_n(k)) = \int_{x_0}^{x_0+\mu} f(t)g(t)\mathrm{d}t。$$

注:例2可以用推论3来理解。

推论4 若 $\lim\limits_{n\to+\infty} y_n(k) = \lim\limits_{n\to+\infty} x_n(k) = h$(其中 h 为与 n,k 无关的实数),且 $g(y_n+\mu\beta_{nk})$ 中 $\mu=0$,则

$$\lim_{n\to+\infty} S_n(x_n(k),y_n(k)) = g(h)\int_{x_0}^{x_0+1} f(t)\mathrm{d}t。$$

2 典型例题

例3 设 $a,b,\mu\geqslant 0$ 且 $\nu>0$,求极限 $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{\left(1+\frac{k}{n}+\frac{a}{n^2}\right)^{\mu}}{\left(1+\frac{k}{n}+\frac{b}{n^2}\right)^{\nu}}$。(文献[4]的第一章1.25题)

解 设函数 $f(x)=(1+x)^{\mu}$,$x_n=\dfrac{a}{n^2}$,$\alpha_{nk}=\dfrac{k}{n}$,此时 $\mu=1$,另一方面,不难发现,函数 $g(x)=(1+x)^{\nu}$,$y_n=\dfrac{b}{n^2}$,$\alpha_{nk}=\dfrac{k}{n}$,同样地有 $\mu=1$,可由推论2得到

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{\left(1+\frac{k}{n}+\frac{a}{n^2}\right)^{\mu}}{\left(1+\frac{k}{n}+\frac{b}{n^2}\right)^{\nu}} = \int_0^1\frac{(1+x)^{\mu}}{(1+x)^{\nu}}\mathrm{d}x = \int_0^1(1+x)^{\mu-\nu}\mathrm{d}x。$$

通过上述含有 μ,ν 的和式极限,可以较容易得到

$$\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{n^2+kn+b}} = \int_0^1(1+x)^{-\frac{1}{2}}\mathrm{d}x = 2\sqrt{2}-2,$$

$$\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{\sqrt{n^2+kn+a}}{n^2+kn+b} = \int_0^1(1+x)^{\frac{1}{2}-1}\mathrm{d}x = \int_0^1(1+x)^{-\frac{1}{2}}\mathrm{d}x = 2\sqrt{2}-2。$$

例4 求极限 $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\dfrac{2}{\sqrt{n^2+2}}+\cdots+\dfrac{n}{\sqrt{n^2+n}}\right)$。

解 将和式整理成 $S(x_n,y_n(k)) = \sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{1}{n}\dfrac{\frac{k}{n}}{\sqrt{1+\frac{k}{n^2}}}$,构造 $f(x)=x$,取 $x_n=0$,$\alpha_{nk}=\dfrac{k}{n}$,此时 $\mu=1$,则 $f(x_n+\mu\alpha_{nk})=0+\dfrac{k}{n}$。同时,构造 $g(x)=\dfrac{1}{\sqrt{1+x}}$,取 $y_n(k)=\dfrac{k}{n^2}$,且有 $\mu=0$,同时 $y_n(k)$ 关于 k 一致收敛于0,得 $\lim\limits_{n\to+\infty} g(y_n(k))=g(0)=1$。故

$$\lim_{n\to+\infty} S_n(x_n,y_n(k)) = g(0)\int_{x_0}^{x_0+1} f(t)\mathrm{d}t = \int_0^1 x\mathrm{d}x = \frac{1}{2}。$$

例5 求极限 $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{\mathrm{e}^{\frac{\pi}{n}}}{n+1}+\dfrac{\mathrm{e}^{\frac{2\pi}{n}}}{n+\frac{1}{2^n}}+\cdots+\dfrac{\mathrm{e}^{\frac{n\pi}{n}}}{n+\frac{1}{n^n}}\right)$。(本题选自文献[5])

解 通项结构为 $S(x_n,y_n(k))=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{e^{\frac{k\pi}{n}}}{1+\frac{1}{nk^n}}$,构造 $g(x)=\frac{1}{1+x}$,取 $y_n(k)=\frac{1}{nk^n}$,此时 $\mu=0$,注意到 $y_n(k)$ 关于 k 一致收敛 0,则 $g(y_n(k)+0\beta_{nk})=\frac{1}{1+\frac{1}{nk^n}}$,有 $\lim\limits_{n\to+\infty}g(y_n(k))=g(0)=1$。同时,构造 $f(x)=e^{\pi x}$,取 $x_n=0,\alpha_{nk}=\frac{k}{n}$,此时 $\mu=1,f(x_n+\mu\alpha_{nk})=e^{\frac{k\pi}{n}}$。故

$$\lim_{n\to+\infty}S(x_n,y_n(k))=\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{e^{\frac{k\pi}{n}}}{1+\frac{1}{nk^n}}=\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}e^{\frac{k\pi}{n}}=g(0)\int_0^1 e^{\pi x}\,dx=\frac{1}{\pi}(e^{\pi}-1)。$$

例6 求极限 $\lim\limits_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{k^2}{n^3+k^2}$。(文献[6]中例1的(b)题)

解 由推论4可知,构造 $g(x)=\frac{1}{1+x}$,取 $y_n(k)=\frac{k^2}{n^3}$,此时 $\mu=0$,且 $y_n(k)$ 关于 k 一致收敛 0,则 $g(y_n(k)+0\beta_{nk})=\frac{1}{1+\frac{k^2}{n^3}}$,有 $\lim\limits_{n\to+\infty}g(y_n(k))=g(0)=1$。同时,构造 $f(x)=x^2$,可知 $x_n=0$,取 $x_n=0,\alpha_{nk}=\frac{k}{n}$,此时 $\mu=1,f(x_n+\mu\alpha_{nk})=\left(\frac{k}{n}\right)^2$。故

$$\lim_{n\to+\infty}S(x_n,y_n(k))=\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{\left(\frac{k}{n}\right)^2}{1+\frac{k^2}{n^3}}=\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n}\right)^2=g(0)\int_0^1 x^2\,dx=\frac{1}{3}。$$

我们甚至可以根据这些规律自己“创造”出一些看起来复杂、但实际上容易解决的题目,如例7。

例7 求极限 $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\sin\left(\frac{k}{n}+\frac{k}{n^2}\right)$。

解 设其函数 $f(x)=\sin x,x_n(k)=\frac{k}{n^2},\alpha_{nk}=\frac{k}{n}$,此时 $\mu=1$,且 $x_n(k)$ 关于 k 一致收敛于0。

由推论可以直接得到

$$\lim_{n\to+\infty}S(x_n,y_n(k))=\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\sin\left(\frac{k}{n}+\frac{k}{n^2}\right)=\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\sin\left(\frac{k}{n}\right)=\int_0^1\sin x\,dx=1-\cos1。$$

或可利用放缩,使两边都变为定理1与定理2的标准式。当 $n>100$ 时,$\max\left\{\frac{k}{n}+\frac{k}{n^2}\right\}=1.001<\frac{\pi}{2}$,故

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\sin\left(\frac{k}{n}+\frac{1}{n^2}\right)\leqslant S_n(x_n)\leqslant\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\sin\left(\frac{k}{n}+\frac{1}{n}\right),$$

又 $x_n(k)=\frac{k}{n^2}\leqslant\frac{1}{n},\forall\varepsilon>0,\exists N(\varepsilon)$,使得任给 $k\in\{1,2,\cdots,n\}$,都有 $x_n(k)\leqslant\frac{1}{n}\leqslant\varepsilon$。

令 $H_n(x_n)=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\sin\left(\frac{k}{n}+\frac{1}{n^2}\right)$,取 $x_n=\frac{1}{n^2}$,则 $x_0=0$,且

$$\lim_{n\to+\infty} H_n(x_n) = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\sin\left(\frac{k}{n}\right) = 1-\cos 1。$$

同理，令 $J_n(x_n) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\sin\left(\frac{k}{n}+\frac{1}{n}\right)$，取 $x_n = \frac{1}{n^2}$，则 $x_0 = 0$，且

$$\lim_{n\to+\infty} J_n(x_n) = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\sin\left(\frac{k}{n}\right) = 1-\cos 1。$$

由两边夹定理，有 $\lim_{n\to+\infty} H_n(x_n) \leqslant \lim_{n\to+\infty} S_n(x_n) \leqslant \lim_{n\to+\infty} J_n(x_n)$，可得 $\lim_{n\to+\infty} S_n(x_n) = 1-\cos 1$。

3 结语

通过对函数序列一致收敛性概念的理解，从由单个函数列构成的和式极限入手演变到由多个函数列相乘构成的和式极限，灵活运用函数的一致连续性，以及黎曼积分的基本概念，我们得到了一类和式极限较为简洁的求法。推理证明了这类和式极限中的“无穷小”这一项是可以“忽略”的，从而达到简化问题的目的。同时，通过对若干复杂例题的解析，可以进一步强化对和式极限所涉及的重要概念的理解与深度学习。

参考文献（References）

[1] 华东师范大学数学系. 数学分析（上册）[M]. 2版. 北京：高等教育出版社，1991.

[2] 谢惠民，沐定夷. 吉米多维奇数学分析习题集学习引导（第二册）[M]. 北京：高等教育出版社，2019.

[3] 李建丽，张文娟. 一类和式极限的求法[J]. 长治学院学报，2017，34(5)：69－70.

[4] FURDUI O. Limits，series，and fractional part integrals [M]. New York：Springer，2013.

[5] 熊良鹏. 一类和式数列极限探讨[J]. 高等数学研究，2021，24(6)：23－25.

[6] YUAN N. A discussion on a limit theorem and its application [J]. College Mathematics，2006，22(1)：90－94.

（责任编辑：胡燕梅）